GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE
SOLUTIONS DES EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DE DROITES

Exercice n°1 page 12

Déterminez des équations vectorielle, paramétriques et cartésiennes (sous forme « système » et sous forme « symétrique ») de la droite d déterminée par les points A(5,0,1) et B(7,1,0) .

Équation vectorielle : $\overrightarrow{OP} = k.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$.

Équations paramétriques

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d \equiv \begin{cases} x = 2k+5 & (1) \\ y = k & (2) \\ z = -k+1 & (3) \end{cases}$$

Équations cartésiennes

Le plus simple est d'exploiter l'équation (2) : $k = y$ et de remplacer dans

- (1) : $x = 2y + 5$
- (2) : $z = -y + 1$

Nous obtenons ainsi un système d'équations cartésiennes de d : $\boxed{d \equiv \begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}}$.

« Forme symétrique » des équations cartésiennes

Rappelons qu'il faut isoler k de chacune des équations paramétriques.

$$\boxed{d \equiv \frac{x-5}{2} = y = -z+1} .$$

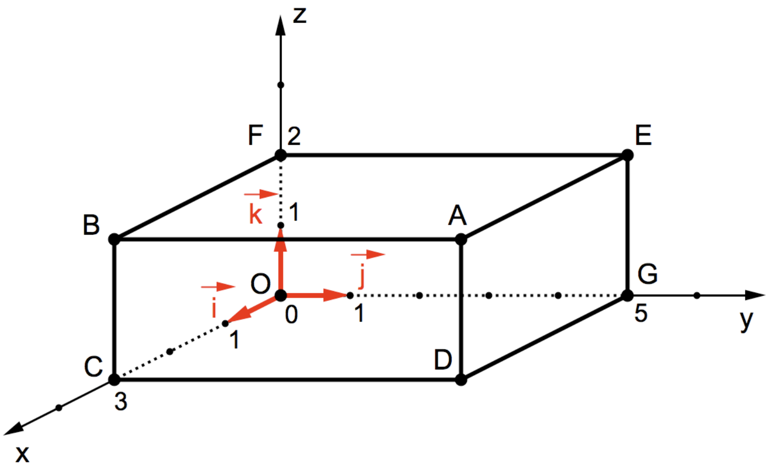
Exercice n°2 page 12

$Ox \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (la droite Ox est l'intersection des plans $y = 0$ et $z = 0$)

$Oy \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (la droite Oy est l'intersection des plans $x = 0$ et $z = 0$)

$Oz \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (la droite Oz est l'intersection des plans $x = 0$ et $y = 0$)

Exercice n°3 page 12



Il s'agit chaque fois de considérer la droite comme l'intersection de deux plans particuliers (si possible, horizontaux ou verticaux).

$AE \equiv \begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$ $AD \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ $CD \equiv \begin{cases} x = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ $CG \equiv \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + 5 \\ z = 0 \end{cases}$

$BF \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ $AG \equiv \begin{cases} z = \frac{2}{3}x \\ y = 5 \end{cases}$ $OB \equiv \begin{cases} z = \frac{2}{3}x \\ y = 0 \end{cases}$ $OD \equiv \begin{cases} y = \frac{5}{3}x \\ z = 0 \end{cases}$

$OE \equiv \begin{cases} z = \frac{2}{5}y \\ x = 0 \end{cases}$ $FG \equiv \begin{cases} z = -\frac{2}{5}y + 2 \\ x = 0 \end{cases}$ $FC \equiv \begin{cases} z = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$

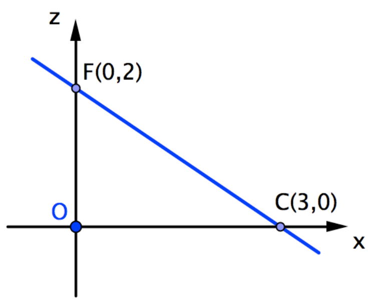
Vous trouvez peut-être que les équations des droites CG , AG , OB , OD , OE , FG et FC sont plus délicates à trouver.

Expliquons comment trouver celles de FC par exemple (les explications sont analogues pour les autres).

D'abord, FC est contenue dans le plan vertical déterminé par les axes Ox et Oz .
Ce plan a pour équation $y = 0$ (première équation cartésienne de FC).

Ensuite, la droite FC est contenue dans le plan FCDE .
Celui-ci étant parallèle à l'axe Oy , il n'y aura aucune condition sur y dans son équation.

Observons que FCDE est perpendiculaire au plan xOz et coupe celui-ci suivant la droite FC .
Maintenant, faisons abstraction de l'espace à trois dimensions, plaçons-nous dans le plan xOz , et cherchons-y l'équation de la droite FC « comme en 4e année » (figure ci-contre) : sa pente est égale à - 2 / 3 et son ordonnée à l'origine vaut 2 .



Donc $FC \equiv y = -\frac{2}{3}x + 2$ (seconde équation cartésienne de FC).

Exercice n°4 page 13

On a les équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 & (1) \\ y = 5k + 3 & (2) \\ z = -k + 2 & (3) \end{cases}$.

a) La droite d comprend donc le point A (-1,3,2) et a pour vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) K (-5,-7,0) $\in d$? $\begin{cases} -5 = 2k - 1 & \rightarrow & k = -2 \\ -7 = 5k + 3 & \rightarrow & k = -2 \\ 0 = -k + 2 & \rightarrow & k = 2 \end{cases}$.

Non, le point K n'appartient pas à d car les trois équations ne peuvent être vérifiées simultanément pour une même valeur de k .

c) Soit L (x , 23 , z) le point cherché. D'après (2) : $23 = 5k + 3 \rightarrow k = 4$.
Remplaçant cette valeur de k dans (1) et (3) , nous obtenons $x = 7$ et $z = -2$.
Conclusion : $L(7, 23, -2) \in d$.

d) Les équations cartésiennes sous forme symétrique sont les plus simples à obtenir.

En effet : $k = \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = 2 - z$ et donc $d \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = 2 - z$.

Si l'on souhaite des équations sous la forme d'un système, voici un exemple :

$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} \rightarrow 5x + 5 = 2y - 6 \rightarrow 5x - 2y + 11 = 0$;

$\dfrac{x+1}{2} = 2 - z \rightarrow x + 1 = 4 - 2z \rightarrow x + 2z - 3 = 0$.

Finalement : $d \equiv \begin{cases} 5x - 2y + 11 = 0 \\ x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Exercice n°5 page 13

On a les équations paramétriques $d \equiv \begin{cases} x = k - 12 & (1) \\ y = k - 14 & (2) \\ z = -3k + 21 & (3) \end{cases}$.

a) La droite d comprend le point A (-12 , -14 , 21) et a pour vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) K (-5,-7,0) $\in d$? $\begin{cases} -5 = k - 12 & \rightarrow & k = 7 \\ -7 = k - 14 & \rightarrow & k = 7 \\ 0 = -3k + 21 & \rightarrow & k = 7 \end{cases}$. Oui, le point K appartient à d .

c) Soit $L(x, 23, z)$ le point cherché. D'après (2) : $23 = k - 14 \rightarrow k = 37$.
Remplaçant cette valeur de k dans (1) et (3), nous obtenons $x = 25$ et $z = -90$.
Conclusion : $L(25, 23, -90) \in d$.

d) Les équations cartésiennes sous forme symétrique sont encore les plus simples à obtenir.
En effet : $k = x + 12 = y + 14 = \dfrac{z-21}{-3}$ et donc $d \equiv x + 12 = y + 14 = \dfrac{z-21}{-3}$.

Si l'on souhaite des équations sous forme d'un système, voici un exemple :

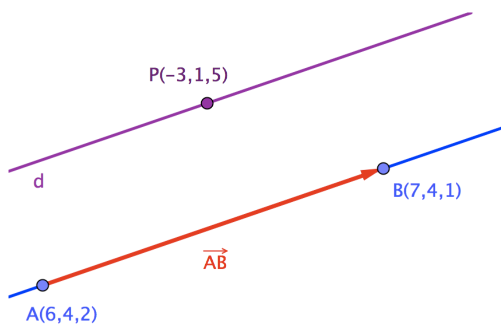
$x + 12 = y + 14 \rightarrow x - y - 2 = 0$;

$x + 12 = \dfrac{z-21}{-3} \rightarrow -3x - 36 = z - 21 \rightarrow -3x - z - 15 = 0$.

Finalement : $d \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x + z + 15 = 0 \end{cases}$.

Exercice n°6 page 13

Déterminez des équations cartésiennes de la droite comprenant le point $P(-3, 1, 5)$ et parallèle à la droite AB avec $A(6, 4, 2)$ et $B(7, 4, 1)$.



Soit d la droite cherchée. Comme elle est parallèle à la droite AB, tout vecteur directeur de AB est aussi vecteur directeur de d.

En particulier, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d.

Comme la deuxième composante du vecteur directeur est nulle, la formule permettant d'obtenir les équations cartésiennes de la droite sous forme symétrique ne s'applique pas.

Écrivons d'abord ses équations paramétriques : $d \equiv \begin{cases} x = k - 3 & (1) \\ y = 1 & (2) \\ z = -k + 5 & (3) \end{cases}$.

L'équation (2) est déjà une des équations cartésiennes de d ; elle nous indique que d est incluse dans le plan $y = 1$.
Pour trouver une seconde équation cartésienne, éliminons le paramètre k entre les équations restantes (1) et (2).

De (1) : $k = x + 3$. Dans (3) : $z = -(x + 3) + 5 \rightarrow x + z - 2 = 0$.

Finalement : $d \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Exercice n°7 page 13

Déterminez des équations cartésiennes de la droite comprenant le point $Q\,(\,2\,,\,0\,,\,0\,)$ et parallèle à la droite CD avec $C\,(\,0\,,\,5\,,\,0\,)$ et $D\,(\,0\,,\,0\,,\,3\,)$.

Soit d la droite cherchée. Comme elle est parallèle à la droite CD , tout vecteur directeur de CD est aussi vecteur directeur de d .

En particulier, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de d .

Comme la première composante du vecteur directeur est nulle, nous passons d'abord par les équations paramétriques :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2 & (1) \\ y = -5k & (2) \\ z = 3k & (3) \end{cases} .$$

L'équation (1) est déjà une des équations cartésiennes de d ; elle nous indique que d est incluse dans le plan $x = 2$.
Éliminons ensuite le paramètre k entre les équations (2) et (3).

De (2) : $k = -\,y\,/\,5$. Dans (3) : $z = -\,3y\,/\,5 \;\rightarrow\; 5z + 3y = 0$.

Finalement : $d \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases}$.

Exercice n°8 page 13

a) La comparaison des équations $a \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z}{6}$ avec la formule de référence (relisez les explications de la page 11 du cours) nous donne immédiatement un point A (3 , - 5 , 0) et un vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Pour la droite $b \equiv x + 3 = 2y + 1 = 8z$, il faut d'abord écrire ses équations sous une forme qui permette la comparaison avec la formule de référence.
Pour cela, il faut que les coefficients de x , y et z aux numérateurs soient tous égaux à 1 :

$$b \equiv x + 3 = 2y + 1 = 8z \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv \frac{x+3}{1} = 2\left(y + \frac{1}{2}\right) = 8z \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$$

Maintenant, la comparaison avec la formule de référence nous donne un point B (- 3 , - ½ , 0) et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{pmatrix}$.

Exercice n°9 page 13

Nous avons $d \equiv \begin{cases} x+3y-z=-4 \\ 2x-y+2z=19 \end{cases}$.

Soit P le point cherché. Sa cote étant égale à 5, remplaçons z par 5 dans les équations de d.

Nous obtenons le système $\begin{cases} x+3y-5=-4 \\ 2x-y+10=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 & (1) \\ 2x-y=9 & (2) \end{cases}$.

Méthode de substitution ou combinaisons linéaires, à vous de choisir.
Ici, je choisis la seconde méthode :

$$\begin{array}{lll} 2\times(1) & 2x+6y=2 & \\ -1\times(2) & -2x+y=-9 & \\ \hline \text{addition} & 7y=-7 & \rightarrow \quad y=-1 \end{array}$$

Remplaçant cette valeur de y dans (1), nous trouvons $x=4$.

Le point cherché est donc $P\left(4\,,-1\,,5\right)$.

Exercice n°10 page 13

Nous avons $e \equiv x-1=2y-4=3z+9$.

Soit Q le point cherché. Son ordonnée étant égale à 4, remplaçons y par 4 dans les équations de d. Nous obtenons :

$$x-1=2.4-4=3z+9 \Leftrightarrow x-1=4=3z+9 \Leftrightarrow \left(x-1=4\right) et \left(3z+9=4\right) \Leftrightarrow \left(x=5\right) et \left(z=-\frac{5}{3}\right).$$

Le point cherché est donc $Q\left(5\,,4\,,-\frac{5}{3}\right)$.

Exercice n°11 page 13

L'écriture $\vec{v}=2\,\vec{i}-3\,\vec{j}+\vec{k}$ est une autre façon de donner les composantes : $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Connaissant le point R (- 1 , 1 , 2), nous pouvons écrire sous forme symétrique les équations de la droite :

$$d \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{1}.$$

Sous la forme d'un système, cela peut être (vérifiez) :

$$d \equiv \begin{cases} x-2z+5=0 \\ y+3z-7=0 \end{cases}.$$

Exercice n°12 page 13

a) Nous avons $d \equiv 2x - a = y + 3 = b - 2z$.

Le point S appartenant à la droite d, les coordonnées de S sont solutions des équations de d (c'est le principe de base de la géométrie analytique, il n'est pas inutile de le rappeler).

Remplaçons donc les coordonnées de $S(1,2,3)$, nous sommes sûrs que les égalités sont vraies !

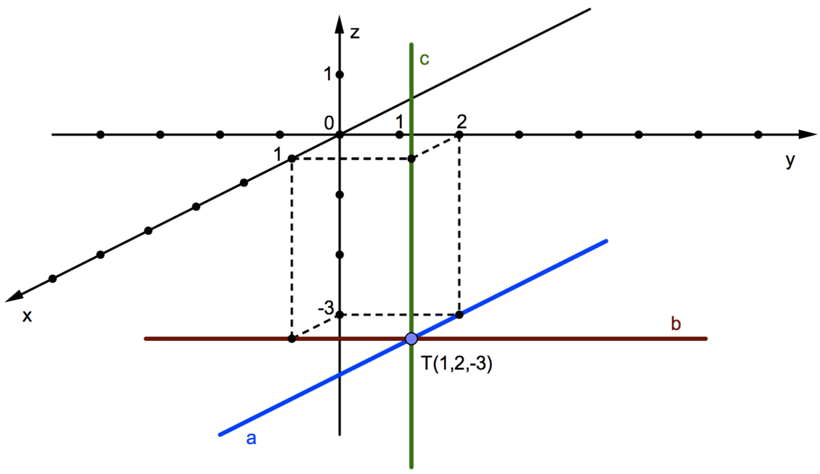
Nous obtenons : $2 - a = 5 = b - 6 \rightarrow a = -3 \;\; et \;\; b = 11$.

b) Nous avons $d \equiv ax + 1 = 2 - ay = b\left(z - 1\right)$.

Remplaçons les coordonnées de $S(1,2,-2)$ dans les équations de d : $a + 1 = 2 - 2a = -3b$.

La première égalité donne $a = 1 / 3$. Il suit $b = - 4 / 9$.

Exercice n°13 page 13



Soit a la droite comprenant T et parallèle à $\mathrm{O}x$: $a \equiv \begin{cases} y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

Un peu d'explication : comme la droite a est parallèle à $\mathrm{O}x$, l'abscisse de ses points varie de façon quelconque et il n'y a donc aucune condition sur x ; ensuite, la droite est l'intersection du plan vertical $y = 2$ et du plan horizontal $z = - 3$, ce qui nous donne ses équations cartésiennes.

Les explications sont analogues pour les deux droites suivantes.

Soit b la droite comprenant T et parallèle à $\mathrm{O}y$: $b \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = -3 \end{cases}$.

Soit c la droite comprenant T et parallèle à $\mathrm{O}z$: $c \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Fin des solutions des exercices des pages 12 et 13