Trajectoires de planètes, comètes et autres satellites : solutions des exercices

1. Les planètes du système solaire

a) Pour la Terre, le demi grand axe $a = 1$ et l'excentricité $c / a = 0{,}017$.
Donc $c = 0{,}017$. À l'aphélie, la distance Terre-Soleil est $a + c = 1{,}017$ (UA).
Au périhélie, la distance Terre-Soleil est $a - c = 0{,}983$ (UA).
La distance séparant le Soleil du centre de l'ellipse est simplement $c = 0{,}017$.

b) Pour Mars, $a = 1{,}524$ et $e = c / a = 0{,}093$ donc $c = 0{,}141732$.
Donc $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1{,}5174$ et $\dfrac{b}{a} \approx 0{,}9957$.
Le rapport du petit axe par le grand axe est extrêmement proche de 1 ce qui correspond bien à une faible excentricité.

c) On a : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - e^2}$.

Le rapport b / a sera d'autant plus faible que e est grande (Mercure) et d'autant plus grand que e est faible (Vénus).

2. Quelques comètes

a) Nous avons $e = c / a = 0{,}967$ et $a - c = 0{,}587$.

Il faut donc résoudre le système formé par ces deux équations : $\begin{cases} \dfrac{c}{a} = 0{,}967 \\ a - c = 0{,}587 \end{cases}$.

La première équation fournit $c = 0{,}967 \,.\, a$ et en remplaçant dans la seconde, on obtient : $a - 0{,}967\, a = 0{,}587$ et donc $0{,}033\, a = 0{,}587$ et $a = 17{,}79$.
La distance à l'aphélie est $a + c = 17{,}79 + 0{,}967 \,.\, 17{,}79 = 34{,}99$ (UA) .

b) Il faut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} \dfrac{c}{a} = 0{,}847 \\ a + c = 4{,}096 \end{cases}$.

On obtient $a = 2{,}2177$ et $c = 1{,}8783$.
La distance au périhélie est $a - c = 0{,}34$ (UA) .

c) Il faut résoudre le système d'équations : $\begin{cases} a - c = 0{,}914 \\ a + c = 371{,}146 \end{cases}$.

En additionnant membre à membre ces deux équations donne $a = 186{,}03$ et ensuite $c = 185{,}116$. L'excentricité est donc $e = c / a = 0{,}9951$.

3. Orbites de satellites

a) À partir de la vitesse notée $\bar{v}_{06}$ sur le schéma. La trajectoire sera alors parabolique.

b) Calculons d'abord $\bar{v}_{0e}$: $\bar{v}_{0e} = \sqrt{\dfrac{2 \times 6{,}67.10^{-11} \times 5{,}97.10^{24}}{6{,}37.10^{6}}} \approx 11\,181{,}38\ (m/s)$.

Le satellite restera donc captif de la Terre et il suivra une trajectoire elliptique.

4. Trajectoire d'un satellite

a) La distance de 92 800 (km) correspond à la distance entre le sommet de la parabole et son foyer.

Donc, $\dfrac{p}{2} = 92\,800 \to p = 185\,600$ et $P \equiv y^2 = 371\,200\ x$.

b) Le satellite atteint sa vitesse maximale lorsque d est minimale, c'est-à-dire quand il est au sommet de la parabole : $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2 \times 4{,}28.10^{13}}{92\,800\,000}} \approx 960{,}42\ (m/s)$.

c) Si y = 160 000 alors x = 68 965,52 . La distance entre le satellite et le foyer de la parabole (centre de la planète) est donc :

$\sqrt{(92\,800 - 68\,965{,}52)^2 + (0 - 160\,000)^2} \approx 161\,765{,}5172\ (km) \approx 161\,765\,517{,}2\ (m)$.

La vitesse à cet endroit est : $v = \sqrt{\dfrac{2 \times 4{,}28.10^{13}}{161\,765\,517{,}2}} \approx 727{,}43\ (m/s)$.

5. Trajectoire d'une comète

a) Il s'agit de l'équation d'une hyperbole horizontale avec $a^2 = 26.10^{14}$ et $b^2 = 18.10^{14}$.
On a donc : $c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 6{,}63.10^{7}$.
Les coordonnées du Soleil sont donc $\left(6{,}63.10^{7}, 0\right)$.

b) La distance r est minimale lorsque la comète est au sommet de l'hyperbole, c'est-à-dire en (a,0) . La distance est alors $r = c - a = 6{,}63.10^{7} - 5{,}099.10^{7} = 1{,}5342.10^{7}$.

À ce moment, on a $v = \sqrt{\dfrac{2 \times 1{,}33.10^{20}}{1{,}5342.10^{10}}} \approx 131\,673{,}94\ (m/s)$.

6. Particules alpha

L'hyperbole est horizontale et a pour asymptote $AO \equiv y = \dfrac{b}{a}x$ donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Lorsque la particule est au plus près, elle est en un sommet et a = 3 . Donc b = 3/2 .

$$H \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9/4} = 1 \Leftrightarrow H \equiv x^2 + 4y^2 - 9 = 0$$