Probabilités

Ce qui ressemble au hasard
Souvent est un rendez-vous

Francis CABREL

Depuis bien longtemps, l'être humain s'interroge sur les questions d'éventualité et de chance. Incapable de prévoir l'avenir, il s'est souvent contenté d'évaluer, tant bien que mal, la possibilité que certains événements se réalisent.

Les choses changèrent vers le milieu du $17^{\text{ème}}$ siècle, lorsque des mathématiciens s'attaquèrent sérieusement aux problèmes posés par les jeux de hasard, contribuant ainsi à créer une branche particulière des Mathématiques : le calcul des probabilités.
Blaise PASCAL (1623-1662) et Pierre de FERMAT (1601-1665) en furent des pionniers, échangeant à propos des jeux une correspondance restée célèbre.

PASCAL

FERMAT

Au $18^{\text{ème}}$ siècle, le fameux *Siècle des Lumières*, au cours duquel les sciences et les techniques firent de prodigieux progrès, certains se mirent à rêver de pouvoir tout prévoir grâce à la science. Un des tenants de cette philosophie déterministe fut Pierre-Simon de LAPLACE (1749-1827). Poursuivant les travaux de NEWTON (1643-1727), il écrivit dans son ouvrage intitulé *Mécanique Céleste* :

« Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé seraient présents à ses yeux. »

Aux yeux de LAPLACE, l'Univers semblait donc réglé comme une horloge, suivant un parcours prédéterminé, ne pouvant faire qu'une seule chose. Cette conception peut s'expliquer par l'atmosphère exaltée d'une époque au cours de laquelle tout phénomène naturel, qu'il concerne la mécanique, la chaleur, les ondes, la lumière ou l'électricité, semblait pouvoir être maîtrisé par la science. Toutefois, LAPLACE n'était pas un naïf : conscient des limites de l'être humain, il contribua largement à développer les probabilités.

Les scientifiques d'aujourd'hui sont bien plus modestes. Ils savent que des systèmes initialement supposés déterministes peuvent s'avérer imprévisibles. C'est ainsi que la *théorie du chaos* est devenue un sujet de pointe dans les Mathématiques contemporaines. Quant aux probabilités, elles virent leurs bases théoriques consolidées par Andreï KOLMOGOROV (1903-1987). Avec les statistiques, elles constituent un précieux outil d'information et d'aide à la décision pour l'Homme d'aujourd'hui.

1. De la fréquence à la probabilité

D'abord une expérience ...

On réalise l'expérience suivante : chaque élève de la classe lance cent fois un dé bien équilibré à six faces et note le nombre d'apparition du « 6 ».
Une fois que tous les élèves ont réalisé leurs lancers, l'évolution de la fréquence d'apparition du « 6 » est étudiée de la façon suivante :

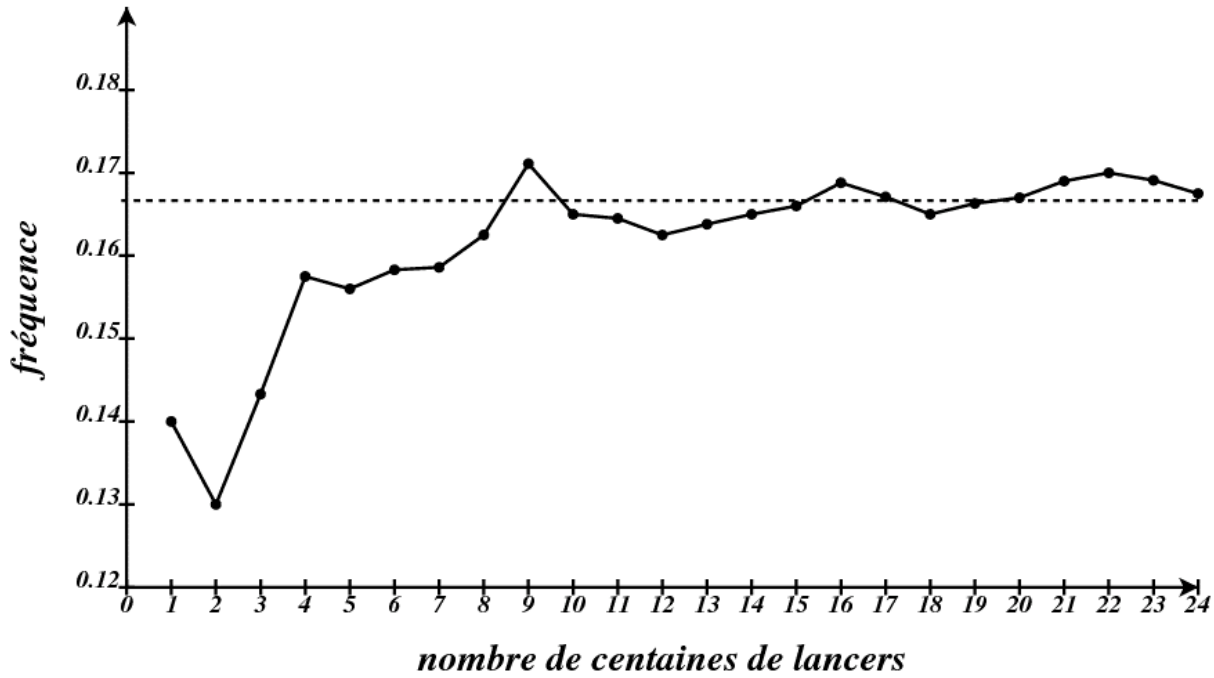
- si le 1er élève a obtenu « 6 » quatorze fois, la première valeur de la fréquence est 0,14 ;
- si le 2ème élève observé douze fois le « 6 », ce nombre est additionné au nombre obtenu par le premier élève, ce qui donne vingt-six apparitions du « 6 » sur deux cent lancers (la deuxième valeur de la fréquence est donc de $\frac{26}{200} = 0,13$;
- et ainsi de suite.

On réalise ensuite un graphique avec le nombre de lancers en abscisse et la fréquence d'apparition du « 6 » en ordonnée.

Le tableau suivant a un jour été obtenu dans une classe de vingt-quatre élèves.

Nombre de lancers	Nombre de « 6 » par élève	Nombre total de « 6 »	Fréquence d'apparition du « 6 »
100	14	14	0,1400
200	12	26	0,1300
300	17	43	0,1433
400	20	63	0,1575
500	15	78	0,1560
600	17	95	0,1583
700	16	111	0,1586
800	19	130	0,1625
900	24	154	0,1711
1000	11	165	0,1650
1100	16	181	0,1645
1200	14	195	0,1625
1300	18	213	0,1638
1400	18	231	0,1650
1500	18	249	0,1660
1600	21	270	0,1688
1700	14	284	0,1671
1800	13	297	0,1650
1900	19	316	0,1663
2000	18	334	0,1670
2100	21	355	0,1690
2200	19	374	0,1700
2300	15	389	0,1691
2400	13	402	0,1675

Le graphique obtenu suite à cette expérience montre que la fréquence d'apparition du « 6 » semble se stabiliser entre 16 % et 17% .



Nous pouvions nous attendre à cela car si le dé est bien équilibré, il n'y a aucune raison pour qu'une face apparaisse plus souvent qu'une autre. Il est donc raisonnable d'affirmer que chaque face a une chance sur six d'apparaître (nous énonçons ainsi une probabilité *a priori*, basée sur un argument de symétrie). Le nombre d'apparitions du « 6 » devait donc être à peu près égal à 1/6 du nombre total de lancers, soit environ 16,666... % de ce nombre.

Bien sûr, il n'est pas impossible qu'à l'issue d'une expérience de ce genre, la fréquence d'apparition du « 6 » soit de 30 % ou de 10 % , mais c'est très peu probable. Si l'on se livre à beaucoup d'expériences de ce type, on observera beaucoup plus souvent des fréquences proches de 1/6 .

La probabilité est une idéalisation mathématique de la fréquence. C'est la fréquence que l'on pense être la plus vraisemblable.

La fréquence est une *mesure* de la probabilité. Parfois, pour évaluer une probabilité, la fréquence est le seul recours. Par exemple, si l'on sait qu'un dé est truqué, il faut le lancer un grand nombre de fois pour évaluer la probabilité d'apparition de chaque face. On parle alors de probabilité *a posteriori*.

2. Vocabulaire et définitions

❶ Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu à l'avance avec certitude.
❷ Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé *événement élémentaire* ou *épreuve*.
❸ L'ensemble de tous les événements élémentaires est appelé *ensemble fondamental* ou *catégorie d'épreuves*. Cet ensemble est noté Ω .

Exemples :

- Lancer un dé et noter les points de la face supérieure est une expérience aléatoire dont les événements élémentaires sont : e_1 = « obtenir 1 », e_2 = « obtenir 2 », ... , e_6 = « obtenir 6 » ; l'ensemble fondamental est $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
- Tirer une seule carte d'un jeu de 52 cartes et noter la carte obtenue est une expérience aléatoire dont les événements élémentaires sont : e_1 = « obtenir l'As de Coeur », e_2 = « obtenir le 2 de Coeur », ... , e_{52} = « obtenir le Roi de Pique » ; l'ensemble fondamental est $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_{51}, e_{52}\}$.

3. Probabilité d'un événement élémentaire

À chacun des événements élémentaires d'une expérience aléatoire est associée une probabilité. Nous savons que celle-ci peut être évaluée à l'aide des fréquences ou déterminée par un argument de symétrie.

Sachant qu'une probabilité est une idéalisation de la fréquence, les propriétés des probabilités sont essentiellement les mêmes que celles des fréquences.

Soit une expérience aléatoire possédant n événements élémentaires et soit Ω son ensemble fondamental : $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$.
Soit p_i la probabilité de l'événement élémentaire e_i . Nous avons :

❶ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\} : 0 \leq p_i \leq 1$

❷ $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

4. Événements

Reprenons l'exemple du lancer d'un dé. Nous savons que sa catégorie d'épreuve est $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
Considérons maintenant les éventualités suivantes :

- A = « le nombre obtenu est pair »
- B = « le nombre obtenu est strictement inférieur à 4 »
- C = « le centre de la face supérieure du dé est occupé par un point »

À chacune de ces éventualités, on peut faire correspondre un sous-ensemble de Ω :

$$A = \{e_2, e_4, e_6\} \qquad B = \{e_1, e_2, e_3\} \qquad C = \{e_1, e_3, e_5\}$$

Ces sous-ensembles sont appelés *événements*.

Définition : un *événement* est un sous-ensemble de l'ensemble Ω des événements élémentaires.

Exercices

1. Dans le cadre du lancer d'un dé, écrire en extension les événements suivants (c'est-à-dire en donnant tous leurs événements élémentaires).
   a) D = « le nombre obtenu est impair »
   b) E = « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 2 »
   c) F = « les points de la face supérieure appartiennent à un cercle »
   d) G = « il y a au moins un ensemble de trois points alignés »
   e) H = « le nombre obtenu est égal à 4 »
   f) I = « le nombre n obtenu est tel que $1 \leq n \leq 6$ »
   g) J = « le nombre obtenu est strictement supérieur à 7 »

---

2. Dans l'exercice n°1, certaines éventualités, bien que formulées différemment, correspondent au même événement. Lesquelles ?

Remarque

Nous dirons qu'un événement A est *réalisé* lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est un événement élémentaire appartenant à A.

Par exemple, si l'événement A est « obtenir un nombre pair » et que j'obtiens 4 en lançant le dé, alors A est réalisé ; si j'obtiens 5, l'événement A n'est pas réalisé.

Dans l'exercice n°1 ci-dessus, l'événement I est toujours réalisé ($I = \Omega$), tandis que l'événement J ne le sera jamais ($J = \varnothing$). Nous dirons que :

Ω est l'événement certain
$\varnothing$ est l'événement impossible

5. Opérations sur les événements

Vu la définition d'un événement, il est clair que :

- la réunion de deux événements est un événement ;
- l'intersection de deux événements est un événement ;
- la différence de deux événements est un événement.

Voyons cela sur des exemples concernant le lancer d'un dé.

Soient les événements
A = « obtenir un multiple de 2 » $= \{e_2, e_4, e_6\}$
B = « obtenir un nombre < 5 » $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
C = « obtenir un nombre ≥ 2 » $= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Réunion de A et de B ($A \cup B$)

Il s'agit de l'événement constitué des événements élémentaires appartenant à A *ou* à B :

$A \cup B$ = « obtenir un multiple de 2 *ou* un nombre < 5 » $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\}$

Intersection de A et de B ($A \cap B$)

Il s'agit de l'événement constitué des événements élémentaires appartenant à A *et* à B :

$A \cap B$ = « obtenir un nombre multiple de 2 *et* < 5 » $= \{e_2, e_4\}$

Différence de C et de A ($C \setminus A$)

Il s'agit de l'événement constitué des événements élémentaires appartenant à C *mais n'appartenant pas* à A :

$C \setminus A$ = « obtenir un nombre ≥ de 2 *mais qui ne soit pas* multiple de 2 » $= \{e_3, e_5\}$

Voici encore deux définitions.

Si E est un événement, l'événement $\Omega \setminus \mathrm{E}$ est appelé l'événement *complémentaire* de E. On écrit : $\overline{E} = \Omega \setminus \mathrm{E}$.

Par exemple, pour l'événement B = « obtenir un nombre < 5 » $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, l'événement complémentaire est $\overline{B}$ = « obtenir un nombre ≥ 5 » $= \{e_5, e_6\}$.

Deux événements A et B tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits *incompatibles*.

Dans le cas du dé, les événements « obtenir un nombre ≤ 3 » et « obtenir un nombre > 4 » sont incompatibles car $\{e_1, e_2, e_3\} \cap \{e_5, e_6\} = \varnothing$.

Exercice

Déterminer, par combinaison des événements liés au jet d'un dé, les événements suivants :

a) obtenir un nombre pair et des points qui se disposent sur un cercle ;
b) obtenir au moins un ensemble de trois points alignés ou bien qu'un point occupe le centre de la face supérieure du dé ;
c) obtenir que les points appartiennent à un cercle et qu'en outre il y ait au moins trois points alignés.

---

6. Probabilité d'un événement

Définition : la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. On la note $P(E)$.

Calculons la probabilité de l'événement B = « obtenir un nombre < 5 » $= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$P(B) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Voici un autre exemple. Lors d'une tombola, 100 billets sont mis en vente.
Parmi ces billets, un seul permet de gagner 50 € , deux de gagner 20 € , cinq de gagner 10 € , dix de gagner 5 € et quatre-vingt deux sont perdants.

Une personne achetant un billet se livre à une expérience aléatoire avec 5 résultats possibles (événements élémentaires).

événement élémentaire e_i	probabilité p_i
e_1 = « gagner 50 € »	$p_1 = 0{,}01$
e_2 = « gagner 20 € »	$p_2 = 0{,}02$
e_3 = « gagner 10 € »	$p_3 = 0{,}05$
e_4 = « gagner 5 € »	$p_4 = 0{,}10$
e_5 = « ne rien gagner »	$p_5 = 0{,}82$

Soit E l'événement « gagner au moins 10 euros ». Nous avons :

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{et} \quad P(E) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}08$$

Le joueur a ainsi 8 chances sur cent de gagner au moins 10 euros.

Conséquences de la définition

❶ $\boxed{P(\varnothing) = 0}$ (la probabilité de l'événement impossible vaut 0)

$\boxed{P(\Omega) = 1}$ (la probabilité de l'événement certain vaut 1 car $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$)

❷ Tout événement a une probabilité comprise entre 0 et 1 :

$$\boxed{\forall E \subset \Omega : 0 \leq P(E) \leq 1}$$

❸ **Loi de la somme** : si A et B sont deux événements *incompatibles* :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Ces propriétés sont connues sous le nom d'axiomes de KOLMOGOROV.

Professeur à l'Université de Moscou, KOLMOGOROV *(1903-1987) est considéré comme le chef de file de l'école russe des probabilités. Il contribua largement à développer cette science.*

Revenons sur la propriété ❸ en considérant de nouveau le lancer d'un dé.

Soient les événements

E = « obtenir un nombre pair » $= \{e_2, e_4, e_6\}$
F = « obtenir un nombre ≥ 5 » $= \{e_5, e_6\}$
G = « obtenir un nombre < 2 » $= \{e_1\}$

Nous avons $P(E) = \dfrac{3}{6}$, $P(F) = \dfrac{2}{6}$ et $P(G) = \dfrac{1}{6}$.

Les événements F et G étant incompatibles, la propriété ❸ devrait se vérifier :

$$P(F \cup G) = P(F) + P(G) \ ?$$

En effet : $P(F \cup G) = P(\{e_1, e_5, e_6\}) = \dfrac{3}{6}$ et $P(F) + P(G) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6}$.

<u>Que se passe-t-il si les événements sont compatibles ?</u>

Dans ce cas, les événements possèdent une intersection non vide. C'est le cas de E et F par exemple. La relation ❸ ne s'applique pas ! En effet :

$$P(E \cup F) = P(\{e_2, e_4, e_5, e_6\}) = \frac{4}{6} \neq P(E) + P(F) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Seul le résultat de gauche est correct. C'est normal : en calculant $P(E) + P(F)$, nous comptons *deux fois* l'événement élémentaire e_6 qui appartient simultanément à E et à F, c'est pourquoi nous obtenons un résultat trop grand.

Pour retrouver le bon résultat après avoir calculé $P(E)+P(F)$, il faut donc soustraire la probabilité de e_6 .

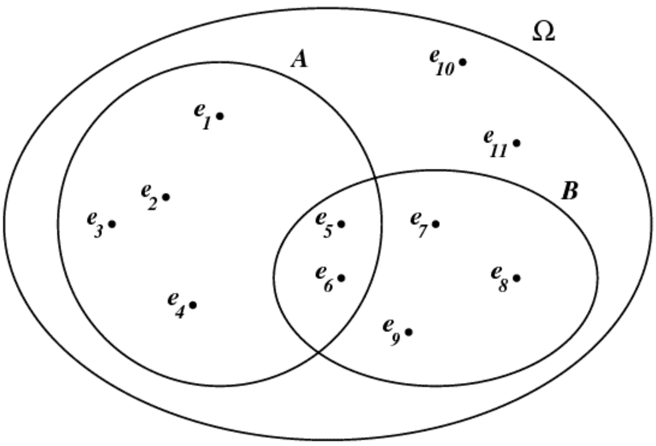
Nous pouvons généraliser ce raisonnement : si nous voulons calculer la probabilité de la réunion de deux événements *quelconques* A et B , il faut additionner leurs probabilités et ensuite *soustraire les probabilités des événements élémentaires communs*. Autrement dit, il faut soustraire la probabilité de l'événement qui est l'intersection de A et de B !

Ce raisonnement débouche sur la

Relation de BOOLE : si A et B sont deux événements quelconques

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

L'exemple illustré suivant achève de nous convaincre et nous dispense d'une démonstration plus théorique.



George BOOLE (1815-1864). Mathématicien anglais, auteur d'importants travaux en logique. L'algèbre de Boole est bien connue des informaticiens.

Soit une expérience aléatoire avec onze résultats possibles : $\Omega=\{e_1,e_2,e_3,...,e_{11}\}$.
Les événements A et B sont compatibles et ont en commun les événements élémentaires e_5 et e_6 .

D'une part, $P(A\cup B)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9$.

D'autre part,

$$P(A)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6$$
$$P(B)=p_5+p_6+p_7+p_8+p_9$$
$$P(A\cap B)=p_5+p_6$$

$$\begin{aligned} P(A)+P(B)-P(A\cap B) &= p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+\underline{p_5}+\underline{p_6}+p_7+p_8+p_9-\underline{p_5}-\underline{p_6} \\ &= p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7+p_8+p_9 \\ &= P(A\cup B) \end{aligned}$$

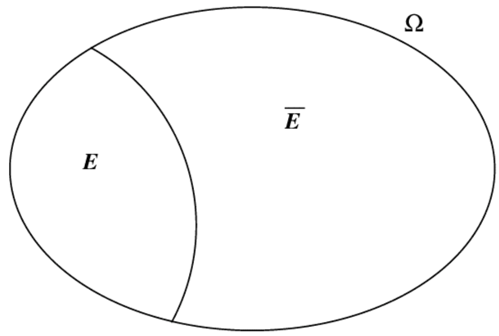
Remarque : lorsque les événement A et B sont incompatibles, nous avons $A\cap B=\varnothing$ et $P(A\cap B)=0$. La relation de BOOLE se ramène alors au troisième axiome de KOLMOGOROV.

Probabilité du complémentaire d'un événement

Pour tout événement E , on a : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Preuve

Deux événements complémentaires sont toujours incompatibles. Nous avons donc :



$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$

Or, $E \cup \overline{E} = \Omega$, donc $P(E \cup \overline{E}) = P(\Omega) = 1$.

Par conséquent : $P(E) + P(\overline{E}) = 1$, d'où la thèse.

Probabilité d'un événement dans le cas des événements élémentaires équiprobables

Une situation que l'on rencontre fréquemment, notamment dans les jeux de hasard, est celle où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Considérons donc une telle expérience aléatoire avec

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\} \text{ et } \forall i \in \{1,2,3,...,n\} : p_i = \frac{1}{n} \text{ .}$$

Soit alors un événement E constitué de k événements élémentaires (par exemple les k premiers, mais le raisonnement reste valable pour k événements élémentaires quelconques) :

$$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_k\} \text{ avec } k \leq n \text{ .}$$

D'après la définition de la probabilité d'un événement, nous avons :

$$\begin{aligned} P(E) &= p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} \qquad (k \text{ fois}) \\ &= \frac{k}{n} \\ &= \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}} \qquad \textit{(formule de LAPLACE)} \end{aligned}$$

Si tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire sont équiprobables, la probabilité d'un événement E est égale au rapport au nombre de cas favorables à E au nombre de cas possibles.

Exemple : si l'on extrait une seule carte d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité d'obtenir une figure noire ?

Exercices

1. À partir des comptes d'une société d'assurance automobile, on a obtenu le tableau ci-dessous. Il tient compte de 10000 accidents ayant donné lieu à des remboursements de réparation et montre combien de ces remboursements se situent entre 0 et 500 euros, entre 500 et 1000 euros, etc.

	Le montant (en euros) du remboursement est		
	Strictement supérieur à	Inférieur ou égal à	Effectifs
e_1	0	500	652
e_2	500	1000	1640
e_3	1000	1500	1899
e_4	1500	2000	2157
e_5	2000	2500	1150
e_6	2500	3000	1087
e_7	3000	3500	482
e_8	3500	4500	424
e_9	4500	5000	287
e_{10}	5000	-	222

Si ces accidents sont assez récents pour que les condition de la circulation n'aient pas trop changé, la société pourra s'en servir pour répondre aux questions suivantes.
Quelle est la probabilité pour qu'un nouvel accident coûte à la société

a) entre 1500 et 2000 euros ?

b) moins de 1000 euros ?

c) plus de 3000 euros ?

---

2. Soit une expérience aléatoire pour laquelle $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

a) Calculer p_1 sachant que $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = \frac{1}{9}$.

b) Calculer p_1 et p_2 sachant que $p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ et que $p_1 = 2p_2$.

---

3. Soient A et B des événements tels que $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Calculer :

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\overline{A})$

c) $P(\overline{B})$

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ (utiliser la première loi de DE MORGAN : $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$)

e) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (utiliser la deuxième loi de DE MORGAN : $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$)

4. Trois chevaux A , B et C participent à une course. Le cheval A a deux fois plus de chances que B de gagner, et B a deux fois de plus de chances que C de gagner. Quelles sont les probabilités respectives de gagner des trois chevaux ?

---

5. Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié a également les yeux marron. Calculer la personne pour qu'une personne tirée au hasard soit un garçon ou ait les yeux marron ?

---

6. Parmi 120 étudiants, 60 étudient l'anglais, 50 étudient l'allemand et 20 étudient à la fois l'anglais et l'allemand. Quelle est la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard

   a) étudie l'anglais ou l'allemand ;

   b) n'étudie ni l'anglais ni l'allemand.

---

7. On prend au hasard 3 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité :

   a) de ne trouver aucune ampoule défectueuse ;

   b) de trouver exactement une ampoule défectueuse ;

   c) de trouver au moins une ampoule défectueuse.

---

8. Une classe se compose de 6 filles et de 10 garçons. On forme une délégation en prenant 3 élèves au hasard. Calculer la probabilité pour que la délégation comprenne :

   a) trois garçons ;

   b) exactement deux garçons ;

   c) au moins une fille ;

   d) exactement deux filles.

---

9. Vingt chevaux prennent le départ d'une course. Si l'on suppose que tous les chevaux sont de force à peu près égale, quelle est la probabilité de prévoir le tiercé

   a) dans l'ordre ;

   b) dans le désordre.

---

10. On rassemble 12 personnes choisies au hasard.

    a) Quelle est la probabilité d'y trouver au moins deux personnes ayant leur anniversaire le même jour (on ne tient pas compte du 29 février) ?

    b) Combien de personnes doit on rassembler pour que cette probabilité dépasse ½ ?

---

7. Probabilités conditionnelles

Exemple 1

Les résultats d'un sondage d'opinion sont donnés dans la tableau suivant.

Réponse à la question posée	Personnes interrogées	
	Hommes	Femmes
Oui	42	74
Non	36	25
Sans avis	12	11

Si l'on choisit une personne au hasard parmi les 200 personnes interrogées, quelle est la probabilité pour que cette personne

a) ait répondu « non » ?
b) Soit une femme ?
c) Soit un homme ayant répondu « oui » ?

On peut également poser des questions en donnant une information préalable.

d) Sachant que la personne choisie est un homme, quelle est la probabilité pour qu'il ait répondu « oui » ?
e) Sachant que la personne n'a pas répondu, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'une femme ?
f) Sachant que la personne choisie est une femme, quelle est la probabilité pour qu'elle n'ait pas répondu ?

Les trois dernières questions font appel à la notion de *probabilité conditionnelle*.
Expliquons-la en répondant à une nouvelle question :

Sachant que la personne choisie est un homme , quelle est la probabilité pour qu'elle ait répondu « non » ?

Soient les événements A = « la personne choisie est un homme » et B = « la personne choisie a répondu non ». La question ci-dessus peut se reformuler comme suit :

Sachant que l'événement A est réalisé , quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé ?

La réponse est $P(B \mid A) = \dfrac{36}{90}$

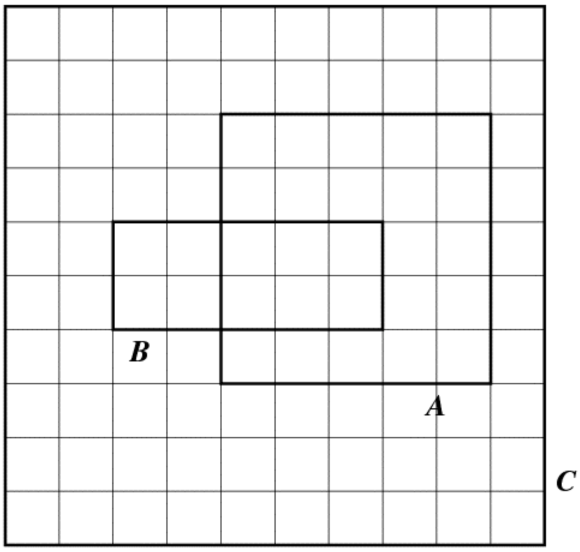
La notation $P(B \mid A)$ signifie « probabilité conditionnelle de B sachant que A est déjà réalisé ».
Une probabilité conditionnelle est en fait une probabilité mesurée dans un ensemble fondamental « réduit ». En effet, si l'on sait d'avance que la personne choisie est un homme, on se place dans un ensemble réduit de 90 personnes (au lieu de 200). On calcule ensuite la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard parmi les 90 ait répondu « non » (36 cas favorables).

On peut toutefois ramener le calcul de $P(B \mid A)$ au calcul de probabilités dans le « grand » ensemble fondamental :

$$
\begin{aligned}
P(B \mid A) &= \frac{36}{90} \\
&= \frac{\frac{36}{200}}{\frac{90}{200}} \\
&= \frac{\textit{probabilité que la personne soit un homme ayant répondu "non"}}{\textit{probabilité que la personne soit un homme}} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}
\end{aligned}
$$

Exemple 2

Supposons que le carré C soit une cible. Imaginons un tireur, suffisamment adroit pour toucher la cible avec certitude, mais pas assez pour placer son tir où il veut.
Nous supposerons donc que la cible est atteinte en un point quelconque, au hasard.



Quelle est la probabilité pour que ce point appartienne

a) au carré A ?
b) Au rectangle B ?
c) Au rectangle B sachant qu'il appartient au carré A ?

Définitions

❶ Soient A et B deux événements. La quantité

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est appelée probabilité conditionnelle de B sachant que A s'est produit, ou plus brièvement, *probabilité de B si A*.

Voici un cas particulier important.

❷ L'événement B est dit *indépendant* de l'événement A si $P(B \mid A) = P(B)$, c'est-à-dire si la probabilité de B est la même, que A se réalise ou non.

Conséquence : loi du produit pour des événements indépendants

Nous savons que

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si l'événement B est indépendant de l'événement A, alors $P(B \mid A)$ peut être remplacé par $P(B)$. Cela donne

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Cette formule est connue sous le nom de « loi du produit ». Insistons sur le fait qu'elle ne s'applique que pour des événements indépendants !
Remarquons encore que cette formule ne change pas si on y permute A et B. Il en résulte que B est indépendant de A si et seulement si A est indépendant de B. C'est pourquoi on dit dans ces conditions A et B sont indépendants ; on a donc aussi $P(A \mid B) = P(A)$.

Voici une autre conséquence de l'indépendance de deux événements.

Relation de Boole pour événements indépendants.

Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

Un exemple d'indépendance

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.
On considère les événements A = « obtenir pile au premier des trois lancers » et B = « ne pas obtenir trois résultats identiques ».
Montrer que A et B sont indépendants.

Solution

Voici l'ensemble fondamental de cette expérience aléatoire :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

Une façon de montrer que deux événements A et B sont indépendants est de montrer que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Vérifions : $A = \{PPP, PPF, PFP, PFF\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$B = \{PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP\} \rightarrow P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$A \cap B = \{PPF, PFP, PFF\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$\rightarrow$ A et B sont bien indépendants

Exercices

1. Deux archers visent la même cible. Le premier a une probabilité de 0,7 de l'atteindre, le second, une probabilité de 0,5 . Quelle est la probabilité pour que la cible soit touchée ?

---

2. Deux étudiants cherchent la solution d'un problème sans se consulter. Le premier a une probabilité de 0,8 de trouver la solution, le second, une probabilité de 0,2 . Quelle est la probabilité pour que le problème ne soit pas résolu ?

---

3. On lance deux dés distinguables et bien équilibrés. Sachant que la somme des points est égale à 6 , calculer la probabilité pour que l'un des dés ait amené un « 2 ».

---

4. On lance deux dés distinguables et bien équilibrés. Sachant qu'un des dés a amené « 5 », calculer la probabilité pour que la somme des points soit égale à 7 .

---

5. On lance deux dés distinguables et bien équilibrés. Soient les événements A = « la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 8 » et B = « l'un des dés au moins a amené un nombre pair ».

   a) Calculer $P(A \mid B)$.

   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

---

6. Dans un institut, 60 % des élèves étudient l'anglais, 50 % l'allemand et 20 % ces deux langues à la fois. On choisit un élève au hasard. Sachant qu'il étudie l'anglais, calculer la probabilité pour qu'il étudie aussi l'allemand.

---

7. Dans une certaine école, 25 % des élèves de rhétorique obtiennent l'appréciation « Excellent » en mathématique, 15 % en physique, et 10 % à la fois en mathématique et en physique. On choisit un élève au hasard.

   a) Si l'élève a obtenu « Excellent » en physique, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi cette appréciation en mathématique ?

   b) Si l'élève a obtenu « Excellent » en mathématique, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi cette appréciation en physique ?

   c) Quelle est la probabilité pour qu'il ait « Excellent » en mathématique *ou* en physique ?

---

8. Le diagramme en arbre : un outil pour calculer des probabilités

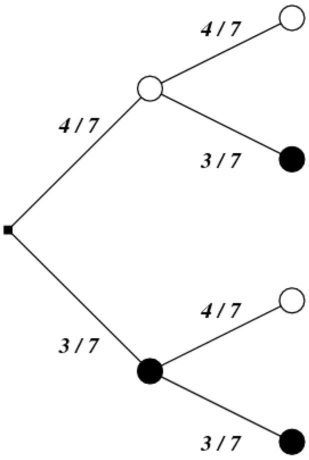
Exemple : une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On extrait successivement deux boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche suivie d'une boule noire ?

Solution

Il faut d'abord remarquer que le tirage peut se faire avec replacement (la première boule est remise dans l'urne après avoir été tirée) ou sans replacement.
Si nous définissons ensuite les événements A = « la première boule est blanche » et B = « la seconde boule est noire », la question revient à calculer $P(A \cap B)$ (probabilité que la première boule soit blanche *et* que la deuxième soit noire).
Or, nous savons que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. Dans les deux cas, la probabilité demandée revient donc à multiplier la probabilité que la première boule soit blanche par la probabilité que la deuxième soit noire, sachant que la première est blanche.

Il est pratique de réaliser un diagramme en arbre dont les branches portent les probabilités des différents tirages. En fonction de la question posée, on suit un « chemin » du diagramme, de gauche à droite, et on multiplie les probabilités attachées aux branches.

Premier cas : tirage avec replacement

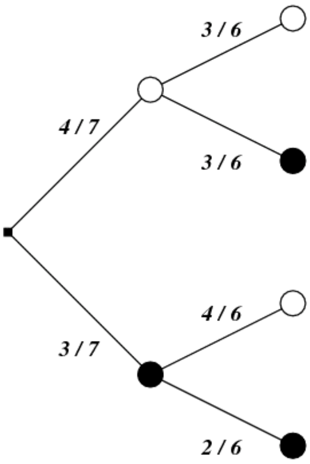


Lors du premier tirage, la probabilité de tirer une boule blanche vaut $4/7$ et celle de tirer une boule noire vaut $3/7$.
Comme la première boule est remise dans l'urne après avoir été tirée, on revient à la situation initiale : les probabilités valent toujours $4/7$ pour une blanche et $3/7$ pour une noire.

La réponse est donc : $P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49} \approx 0{,}2449$.

Dans cette situation, les tirages étaient **indépendants** (ce qui est cohérent avec le fait que $P(B \mid A) = P(B)$)

Deuxième cas : tirage sans replacement



Dans ce cas, les probabilités des résultats possibles du deuxième tirage dépendent des résultats du premier tirage. En effet, si on a d'abord tiré une boule blanche, il restera 3 boules blanches et 3 boules noires sur un total de 6 boules. Si on a d'abord tiré une boule noire, il restera 4 boules blanches et 2 boules noires sur un total de 6 boules.

La réponse est donc : $P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857$.

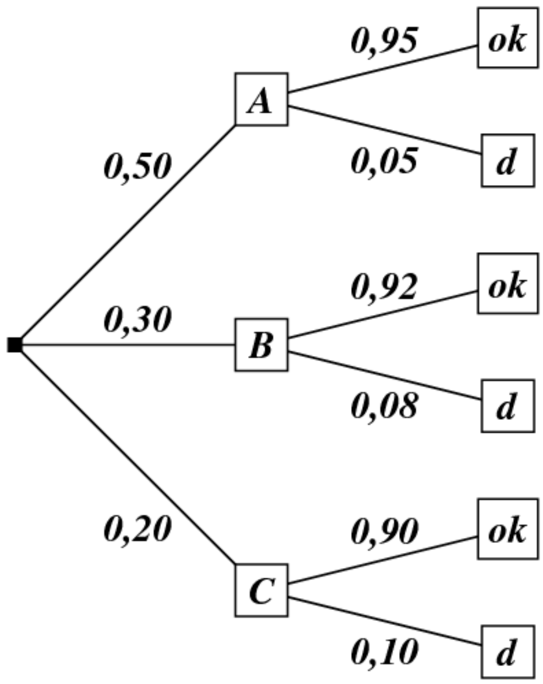
Dans cette situation, les tirages n'étaient **pas indépendants**.

Voici un exemple plus élaboré.

Une entreprise dispose de trois machines pour fabriquer un certain type de pièce. La production est répartie comme suit : 50 % par la machine A, 30 % par la machine B et 20 % par la machine C. Dans la production de chacune des machines, on trouve des pièces défectueuses. On estime que c'est le cas de 5 % des pièces produites par A, de 8 % de celles produites par B et de 10 % de celles produites par C. À la fin de la journée, on tire une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces produites. a) Quelle est la probabilité pour que la pièce provienne de la machine A et soit défectueuse ? b) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse ? c) Si la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Solution

Il faut d'abord tenir compte du fait que la pièce choisie peut provenir d'une des trois machines (premier niveau du diagramme en arbre). Ensuite, pour chaque machine, envisager les deux cas : pièces en parfait état (*ok*) ou défectueuse (*d*) (deuxième niveau de l'arbre).



Pour trouver la réponse à la question (a), appliquer simplement la loi du produit. Pour la question (b), appliquer la loi du produit et la loi de la somme (ou 3$^{\text{ème}}$ axiome de Kolmogorov) ; en effet, il y a trois chemins dans le diagramme en arbre qui correspondent à une pièce défectueuse à l'arrivée.
La question (c) est plus délicate. Il faut se placer dans l'ensemble des pièces défectueuses et y considérer celles qui proviennent de la machine A.

Réponses : a) 0,025 b) 0,069 c) $\frac{25}{69} \approx 0{,}3623$ (expliquer !)