CONIQUES : ÉVALUATION FORMATIVE (CORRIGÉ)

1. $E \equiv \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Ellipse horizontale avec $a = 3$ et $b = 2$. Donc : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$.
Foyers : $F_1\left(-\sqrt{5},0\right)$ et $F_2\left(\sqrt{5},0\right)$.

b) Transformons l'équation de E (ce n'est pas obligatoire) : $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Résolvons le système $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 & (1) \\ y = 2x + 2 & (2) \end{cases}$.

De (2) dans (1) :

$$4x^2 + 9\left(2x+2\right)^2 = 36 \rightarrow 40x^2 + 72x = 0 \rightarrow 8x\left(5x+9\right) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{9}{5} .$$

Remplaçant ces valeurs de x dans (2) , nous obtenons les points d'intersection $I\left(0,2\right)$ et $J\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$ (toutes les vérifications graphiques sont à la page 2).

c) Les tangentes étant parallèles à la droite $e \equiv y = x$ dont la pente vaut 1 , elles auront une équation de la forme $t \equiv y = x + p$.

Remplaçons dans (1) : $4x^2 + 9\left(x+p\right)^2 = 36 \rightarrow 13x^2 + 18px + 9p^2 - 36 = 0 \quad (*)$.

Le discriminant de cette équation doit être nul :

$\Delta = 324p^2 - 4.13.\left(9p^2 - 36\right) = 0 \rightarrow -144p^2 + 1872 = 0 \rightarrow p = \pm\sqrt{13}$.

Les tangentes cherchées sont donc : $t_1 \equiv y = x + \sqrt{13}$ et $t_2 \equiv y = x - \sqrt{13}$.

Pour trouver les points de tangence, il faut se rappeler que l'équation (*) a une solution donnée par $x = -b/2a$ pour chaque valeur de p :

Si $p = \sqrt{13}$, alors $x_1 = -\dfrac{18\sqrt{13}}{26} = -\dfrac{9\sqrt{13}}{13} \approx -2{,}4962 \xrightarrow{t_1} y_1 \approx 1{,}1094$.

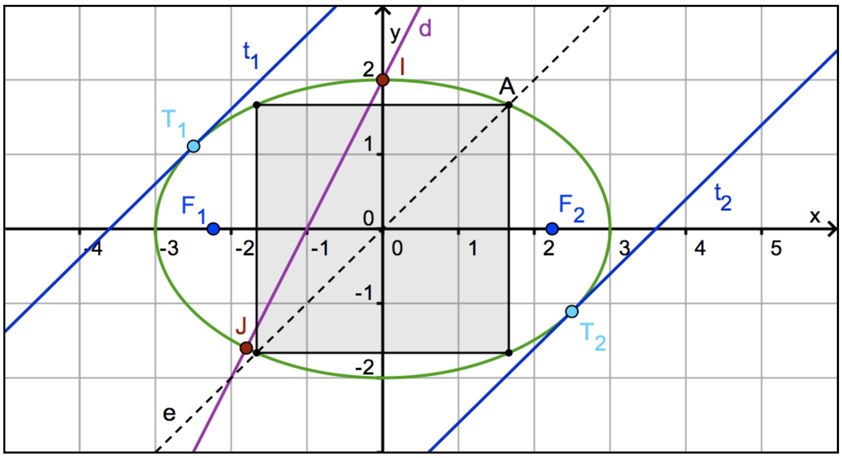
Si $p = -\sqrt{13}$, par symétrie on trouve $x_2 = \dfrac{9\sqrt{13}}{13} \approx 2{,}4962 \xrightarrow{t_2} y_2 \approx -1{,}1094$.

d) Un carré inscrit dans l'ellipse est centré à l'origine et ses diagonales sont situées sur les droites $y = x$ et $y = -x$.
Considérons le sommet A du carré appartenant à la droite $y = x$ et de coordonnées positives. Pour trouver A , il suffit de remplacer y par x dans l'équation de l'ellipse et de résoudre l'équation obtenue :

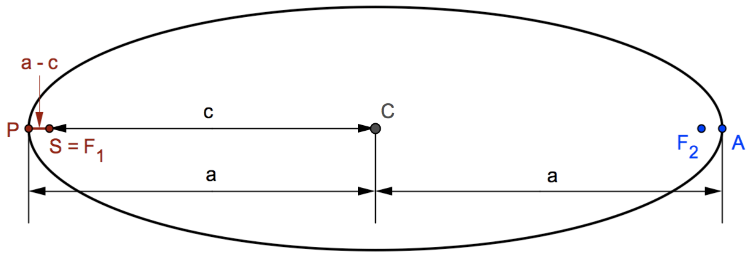
$$4x^2 + 9x^2 = 36 \rightarrow x^2 = \frac{36}{13} \rightarrow x = \pm\frac{6\sqrt{13}}{13} \rightarrow A\left(\frac{6\sqrt{13}}{13},\frac{6\sqrt{13}}{13}\right) .$$

La mesure d'un côté du carré est donc $\dfrac{12\sqrt{13}}{13} \approx 3{,}3282$.

Vérifications graphiques



2. Dans le schéma ci-dessous, C est le centre de l'orbite elliptique de la comète, S est le Soleil (un des foyers de l'ellipse) , P la position de la comète au périhélie et A sa position à l'aphélie.



Nous avons $e = \dfrac{c}{a} = 0{,}97$ (1) et $a - c = 0{,}537$ (2) .

Résolvons le système formé par (1) et (2) . De (1) : $c = 0{,}97 . a$.

Dans (2) : $a - 0{,}97 . a = 0{,}537 \rightarrow 0{,}03 . a = 0{,}537 \rightarrow a = 17{,}9$. Donc, $c = 0{,}97 . 17{,}9 = 17{,}363$.

La distance qui sépare le Soleil de la comète lorsque celle-ci est à l'aphélie est

$$|SA| = c + a = 17{,}363 + 17{,}9 = 35{,}263 \ (UA) .$$

3. Transformons l'équation de H :

$$H \equiv x^2 - 6x - 4y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 - 4y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4y^2 = 4$$

$$H \equiv \frac{(x-3)^2}{4} - y^2 = 1$$

Il s'agit donc d'une hyperbole horizontale, centrée en (3,0) avec $a = 2$ et $b = 1$.

Donc, $c^2 = a^2 + b^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$.

Sommets : $(\pm 2{,}0) + (3{,}0) \rightarrow S_1(5{,}0)$ *et* $S_2(1{,}0)$.

Foyers : $(\pm\sqrt{5}{,}0) + (3{,}0) \rightarrow F_1(\sqrt{5} + 3{,}0)$ *et* $F_2(-\sqrt{5} + 3{,}0)$.

Asymptotes : $y = \pm\frac{1}{2}(x-3) \rightarrow AO_1 \equiv y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ *et* $AO_2 \equiv y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

4. a) $P \equiv y^2 = 6x$ est une parabole horizontale ouverte à droite et de sommet $(0,0)$ (équation de la forme $y^2 = 2px$ avec $p = 3$). Son foyer est $F\left(\frac{3}{2},0\right)$ et sa directrice $d \equiv x = -\frac{3}{2}$.

b) Si $x = 1$, alors $y^2 = 6$ et donc $T\left(1,\sqrt{6}\right)$.

c) La pente de la tangente peut se trouver par dérivation implicite de l'équation de P :

$$2yy' = 6 \to y' = \frac{3}{y} \quad \to \quad m_t = y'(1) = \frac{3}{y(1)} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} .$$

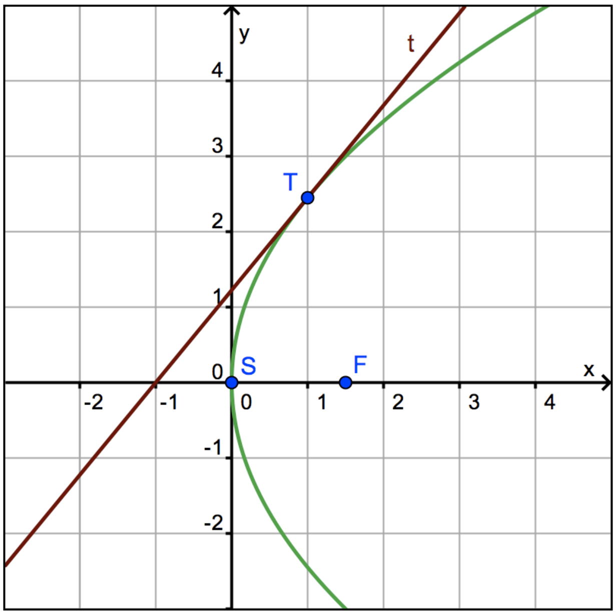
Donc, $m_t = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'équation de la tangente s'obtient par la formule habituelle :

$$t \equiv y - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)$$

$$\to \quad t \equiv y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{\sqrt{6}}{2} .$$

Vérifications graphiques ci-contre.



---

5. a) Une hyperbole est le lieu géométrique des points du plan dont les distances à deux points fixes F_1 et F_2 (les *foyers*) ont une différence constante en valeur absolue.

b) $H \equiv x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole horizontale centrée en $(0,0)$ avec $a = 1$ et $b = 1$.
Donc, $c = \sqrt{2}$ et les foyers sont $F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$ *et* $F_2\left(\sqrt{2},0\right)$.

c) La voie directe étant interdite à cause d'un obstacle opaque, il faut émettre un rayon lumineux à partir de F_2 vers le miroir hyperbolique.
En vertu de la propriété optique connue, le rayon se réfléchira suivant une droite passant par F_1 .
Donc, si nous voulons que le rayon réfléchi passe par A , traçons la droite AF_1 .
Son point d'intersection avec l'hyperbole est le point Q cherché.
Le rayon incident doit être F_2Q .