FACULTÉ POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ DE MONS

ÉPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2019
GÉOMÉTRIE
SÉRIE A

QUESTION 1

Dans un repère orthonormé OXY, soient OA et OB deux segments de longueur fixe L. Soit α l'angle $\widehat{AOB}$ compris dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$. Soient C, l'image de B par une symétrie orthogonale admettant pour axe la droite OA et D, l'image de A par une symétrie orthogonale admettant pour axe la droite OB. Soit E le pied de la perpendiculaire à la droite OA passant par D.

a) Faites une figure
b) Démontrez que A, B, C et D sont sur un cercle.
c) Calculez le rapport $\frac{|DE|}{|BC|}$ en fonction de α.

Si l'on considère que OA est aligné sur l'axe OX,

d) Déterminez l'équation du lieu de M, milieu du segment DE.
e) Déterminez l'aire du quadrilatère convexe CBDE en fonction de α et de L.

QUESTION 2

Soient les points A, B, C et D dont les coordonnées dans un repère orthonormé OXYZ sont les suivantes :

A(8 ;12 ;0) ; B(0 ;10 ;3) ; C(5 ;4 ;6) ; D(4 ;9 ;16)

Soit le prisme p dont A, B et C sont les sommets d'une des bases triangulaires et AD une arête.
Soit le plan π d'équations paramétriques

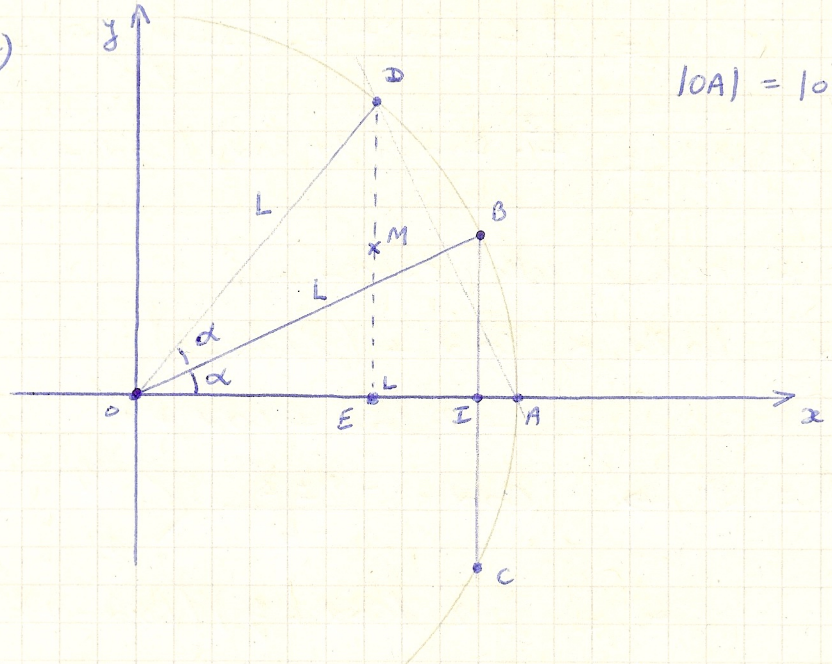
$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda + \frac{19}{5}\mu \\ y = 8 \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

a) Faites une figure représentant le prisme p et le plan π.
b) Déterminez l'équation cartésienne du plan π.
c) Déterminez les coordonnées des autres sommets du prisme.
d) Déterminez les coordonnées de l'intersection de l'arête AC du prisme p avec le plan π et reportez-la sur la figure.
e) Déterminez le nombre d'intersections entre le plan π et les arêtes du prisme p. Quelle est la forme de l'intersection entre p et le plan π ?

UMONS - GÉOMÉTRIE - JUILLET 2019

Série A

1) a)



$|OA| = |OB| = L$

b) La symétrie orthogonale d'axe OA envoie O sur O et B sur C.
L'image par cette symétrie du segment [OB] est donc le segment [OC], de même longueur L.

Donc, C appartient au cercle de centre O et de rayon L.

Par un raisonnement analogue avec la symétrie orthogonale d'axe OB, on trouve que $|OD| = L$.

Donc : $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = L$
→ les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon L.

c) $\frac{|DE|}{|BC|} = ?$ $\quad |DE| = L . \sin(2\alpha) = L . 2 . \sin\alpha . \cos\alpha$

$|BC| = 2 . |BI| = 2 . L . \sin\alpha$

$\rightarrow \frac{|DE|}{|BC|} = \cos\alpha$

d) $\left.\begin{array}{l} D(L.\cos 2\alpha , L.\sin 2\alpha) \\ E(L.\cos 2\alpha , 0) \end{array}\right\} \rightarrow M\left(L.\cos 2\alpha , \frac{L.\sin 2\alpha}{2}\right)$

$\left\{\begin{array}{l} x_M = L.\cos 2\alpha \\ y_M = \frac{L.\sin 2\alpha}{2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} x_M^2 = L^2.\cos^2 2\alpha & (1) \\ 4y_M^2 = L^2.\sin^2 2\alpha & (2) \end{array}\right.$

(1) + (2) $\boxed{\mathcal{L}_M \equiv x^2 + 4y^2 = L^2}$

Le lieu de M est l'ellipse centrée en (0,0) de $\frac{1}{2}$ g^d axe L et de $\frac{1}{2}$ p^t axe $L/2$.

e) $\text{Aire}(CBDE) = \frac{(|BC| + |DE|) \cdot |EI|}{2}$

$= \frac{(2L\sin\alpha + L \cdot \sin 2\alpha) \cdot (L\cos\alpha - L\cos 2\alpha)}{2}$

$= \frac{(\cancel{2}L\sin\alpha + L \cdot \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha)(L\cos\alpha - L\cos 2\alpha)}{\cancel{2}}$

$$\boxed{\text{Aire}(CBDE) = L^2 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)(\cos\alpha - \cos 2\alpha)}$$

Peut-on réduire cette expression ?

$\cos\alpha - \cos 2\alpha = \cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)$

$= -2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1$

$\left[\Delta = 9 \rightarrow \cos\alpha = \frac{-1 \pm 3}{-4} < \begin{matrix} -1/2 \\ 1 \end{matrix} \right]$

$= -2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right)(\cos\alpha - 1)$

$= (2\cos\alpha + 1)(1 - \cos\alpha)$

$\text{Aire}(CBDE) = L^2 \sin\alpha\,(2\cos\alpha + 1)\underbrace{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)}_{\sin^2\alpha}$

$$\boxed{\text{Aire}(CBDE) = L^2 \cdot \sin^3\alpha \cdot (2\cos\alpha + 1)}$$

2 $A(8, 12, 0)$ $B(0, 10, 3)$ $C(5, 4, 6)$ $D(4, 9, 16)$

a) Figure : voir page suivante.

b) $\pi \equiv y = 8$ (plan // xOz passant par $(0,8,0)$)

c) Autres sommets du prisme : ajouter aux coordonnées de B et C les composants de $\vec{AD}$

1/ $\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix}$ $E(-4, 7, 19)$

2/ $\vec{OF} = \vec{OC} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 22 \end{pmatrix}$ $F(1, 1, 22)$

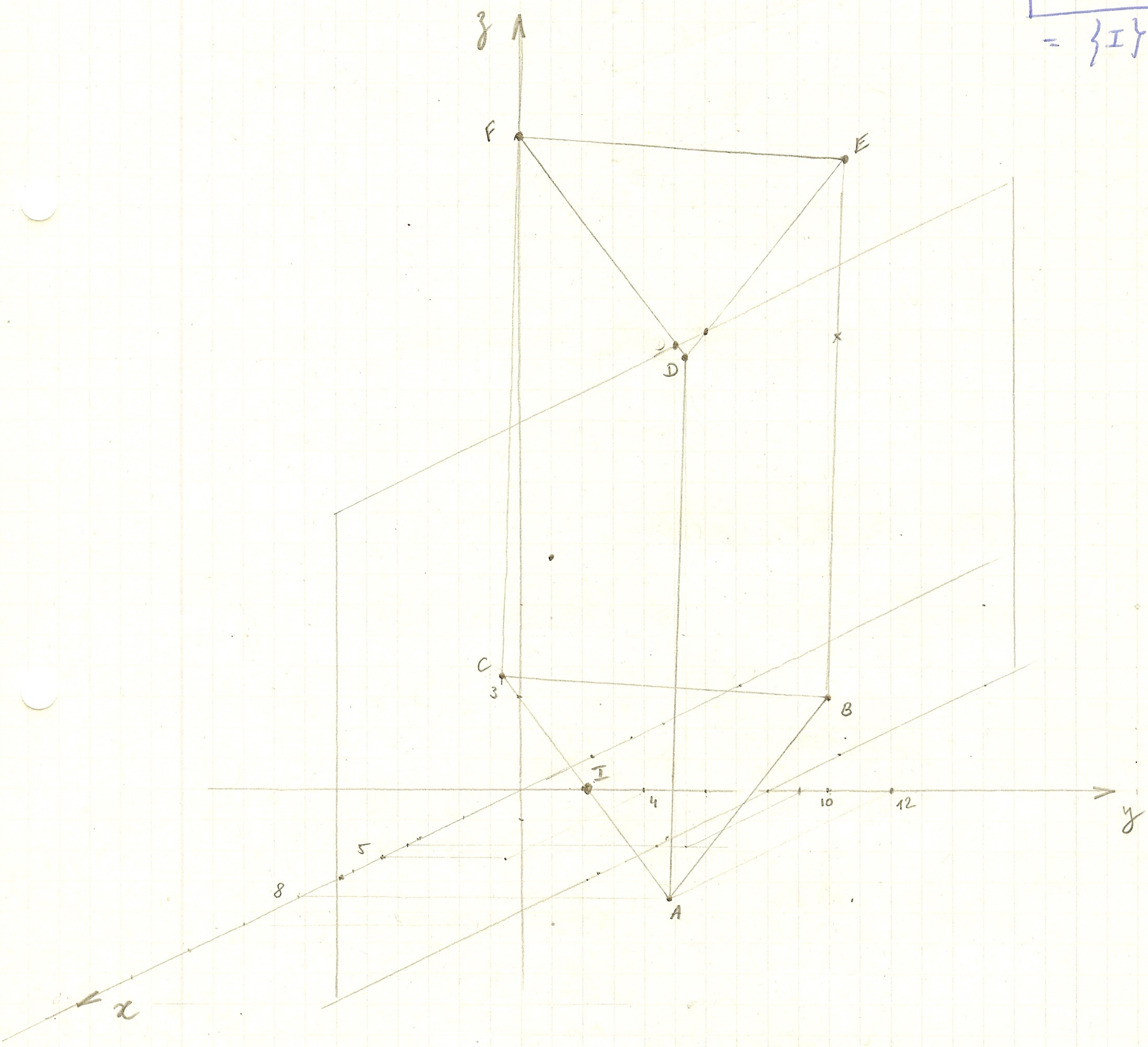
d) $AB \equiv \begin{cases} x = 8\lambda + 8 \\ y = 2\lambda + 12 \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $\qquad \vec{BA}\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $A(8,12,0)$

$\underline{AB \cap \pi}$? $\quad y = 8 \rightarrow 8 = 2\lambda + 12 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ z = 6 \end{cases}$

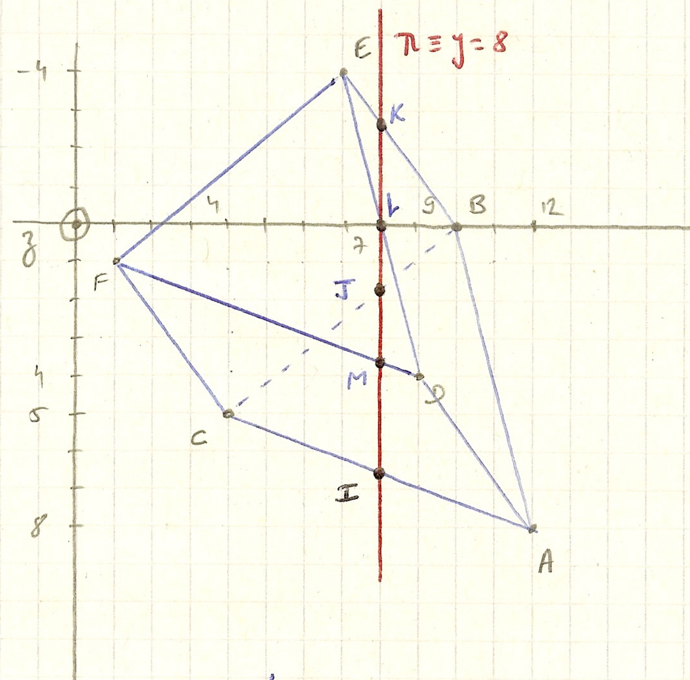
$AB \cap \pi = \{(-8, 8, 6)\}$

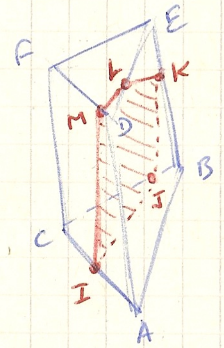
$AC \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 8 \\ y = 8\lambda + 12 \\ z = -6\lambda \end{cases}$ $\quad y = 8 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ z = 3 \end{cases}$

$\boxed{AC \cap \pi = \left\{\left(\frac{13}{2}, 8, 3\right)\right\}}$
$= \{I\}$



e) Une "vue aérienne" permet de voir que $\pi \equiv y = 8$ aura 5 points d'intersection avec les arêtes du prisme.





Le plan π rencontre

AC	(I)
BC	(J)
BE	(K)
DE	(L)
DF	(M)

<u>Calcul des autres points</u>

$$BC \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -6\lambda + 10 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases} \qquad 8 = -6\lambda + 10 \rightarrow \lambda = 1/3 \rightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{J\left(\frac{5}{3}, 8, 4\right)}$$

$$BE \equiv \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = -3\lambda + 10 \\ z = 16\lambda + 3 \end{cases} \qquad 8 = -3\lambda + 10$$

$$\lambda = 2/3 \rightarrow \begin{cases} x = -8/3 \\ z = 41/3 \end{cases} \qquad \boxed{K\left(-\frac{8}{3}, 8, \frac{41}{3}\right)}$$

$$DE \equiv \begin{cases} x = -8\lambda + 4 \\ y = -2\lambda + 9 \\ z = 3\lambda + 16 \end{cases} \qquad 8 = -2\lambda + 9 \rightarrow \lambda = 1/2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 35/2 \end{cases}$$

$$\boxed{L\left(0, 8, \frac{35}{2}\right)}$$

$$DF \equiv \begin{cases} x = -3\lambda + 1 \\ y = -8\lambda + 1 \\ z = 6\lambda + 22 \end{cases} \qquad 8 = -8\lambda + 1 \rightarrow \lambda = -7/8 \rightarrow \begin{cases} x = 29/8 \\ z = 134/8 \end{cases}$$

$$\boxed{M\left(\frac{29}{8}, 8, \frac{134}{8}\right)}$$

L'intersection entre π et le prisme est le PENTAGONE IJKLM

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2019
SERIE B

GEOMETRIE

Géométrie dans le plan

Dans un repère orthonormé OXY, on considère deux droites d_1 et d_2 parallèles à OY et coupant l'axe OX respectivement aux points A (3/2.L, 0) et B (-L, 0). Soit d_3 une droite passant par A, coupant d_2 en C ($y_C > 0$) et formant un angle α ($\alpha < \pi/2$) avec l'axe OX. Soit une circonférence c_1 passant par O et A et dont le centre D appartient à d_3. Soit d_4 la droite passant par O et D coupant c_1 en E ($x_E > 0$). Soit d_5 une droite parallèle à d_3 passant par E et coupant l'axe OY en F.

1. **Réaliser une figure**

Par les méthodes de la géométrie synthétique

2. **Exprimez l'angle OEF en fonction de α**
3. **Exprimez la distance OF en fonction de L et α**

Par les méthodes de la géométrie analytique

4. **Pour le cas où L vaut $5.\sqrt{3}$ mètres et α vaut 30°, établissez l'équation de l'ellipse e_1, de grand axe vertical, centrée sur O et qui passe par les points D et F**

Géométrie dans l'espace

Soit un repère orthonormé OXYZ avec OZ placé verticalement.
Soit S_1 une sphère de rayon R centrée à l'origine du repère.
Soit S_2 une sphère de rayon r, tangente à S_1, dont le centre se trouve sur l'axe OZ.
On définit $\lambda = R/r$ avec $\lambda > 1$.
Soit C_1 le cône de volume minimal d'axe OZ qui est tangent en même temps à S_1 et à S_2 et les contient entièrement.

1. **Réaliser une figure**

Par les méthodes de la géométrie synthétique

2. **Exprimer la hauteur de C_1 en fonction de r et λ.**
3. **Si l'on impose r = 1,75 m et $\lambda = 3$, déterminer le volume de C_1.**

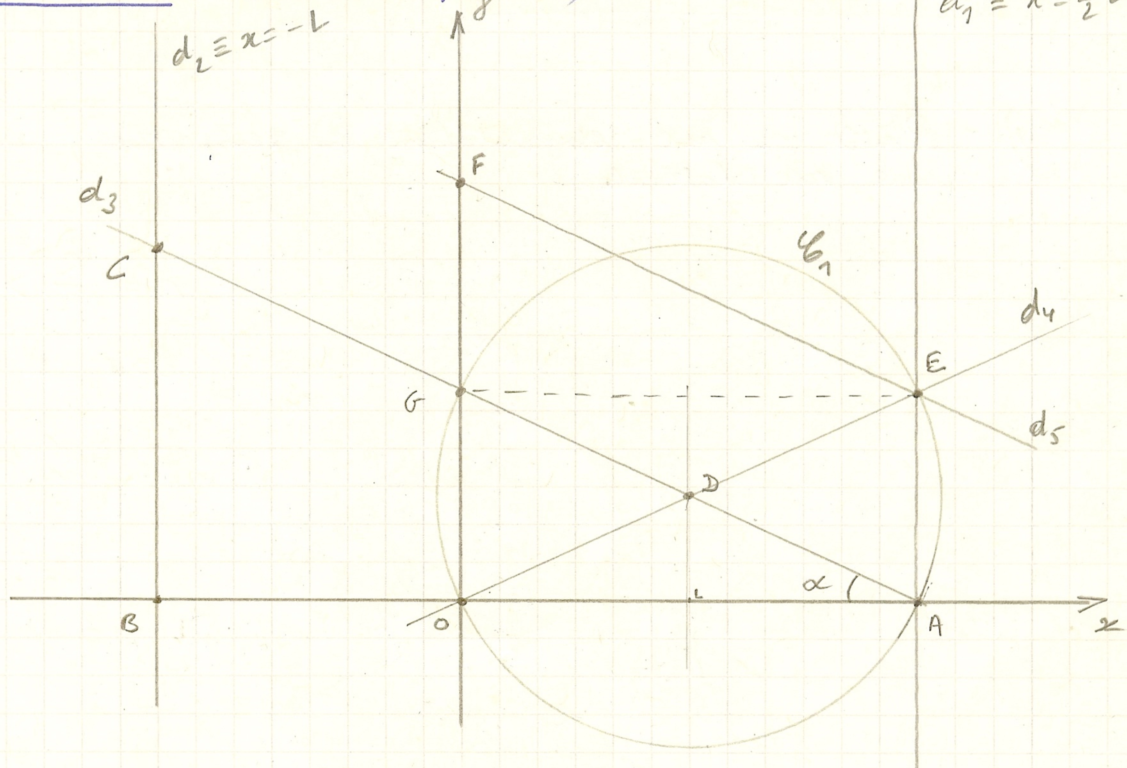
Par les méthodes de la géométrie analytique

4. **Etablir les équations paramétriques du plan π parallèle à l'axe OY, passant par le centre de S_2 et par le point G de percée de l'axe OX dans S_1 (avec $x_G > 0$).**
5. **Déduire l'équation cartésienne de π.**

5

Série B. (Géométrie plane)

1)



2) $\widehat{OEF} = ?$ Le triangle OAE est rectangle en A par hypothèse (on a construit $d_1 \parallel Oy$ $\rightarrow d_1 \perp Ox$)

Comme O et A appartiennent au cercle, le Δ OAE est inscrit dans ce cercle $\rightarrow$ $E \in \mathscr{C}_1$

$\widehat{OAD} = \underbrace{\widehat{AOD}}_{} = \alpha$

angle inscrit à $\mathscr{C}_1$ $\rightarrow$ angle au centre $\widehat{ADE} = 2\alpha$

$\rightarrow \boxed{\widehat{OEF} = 2\alpha}$

3) $|OG| = \frac{3}{2}L \cdot \tan\alpha \rightarrow \boxed{|OF| = 3L \cdot \tan\alpha}$

4) $L = 5\sqrt{3}$ $\alpha = 30°$

$\mathscr{C} \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a = |OF| = 3 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \underbrace{\tan 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 15$

$\rightarrow \mathscr{C} \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{225} = 1$

$\boxed{\mathscr{C} \equiv \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{225} = 1}$

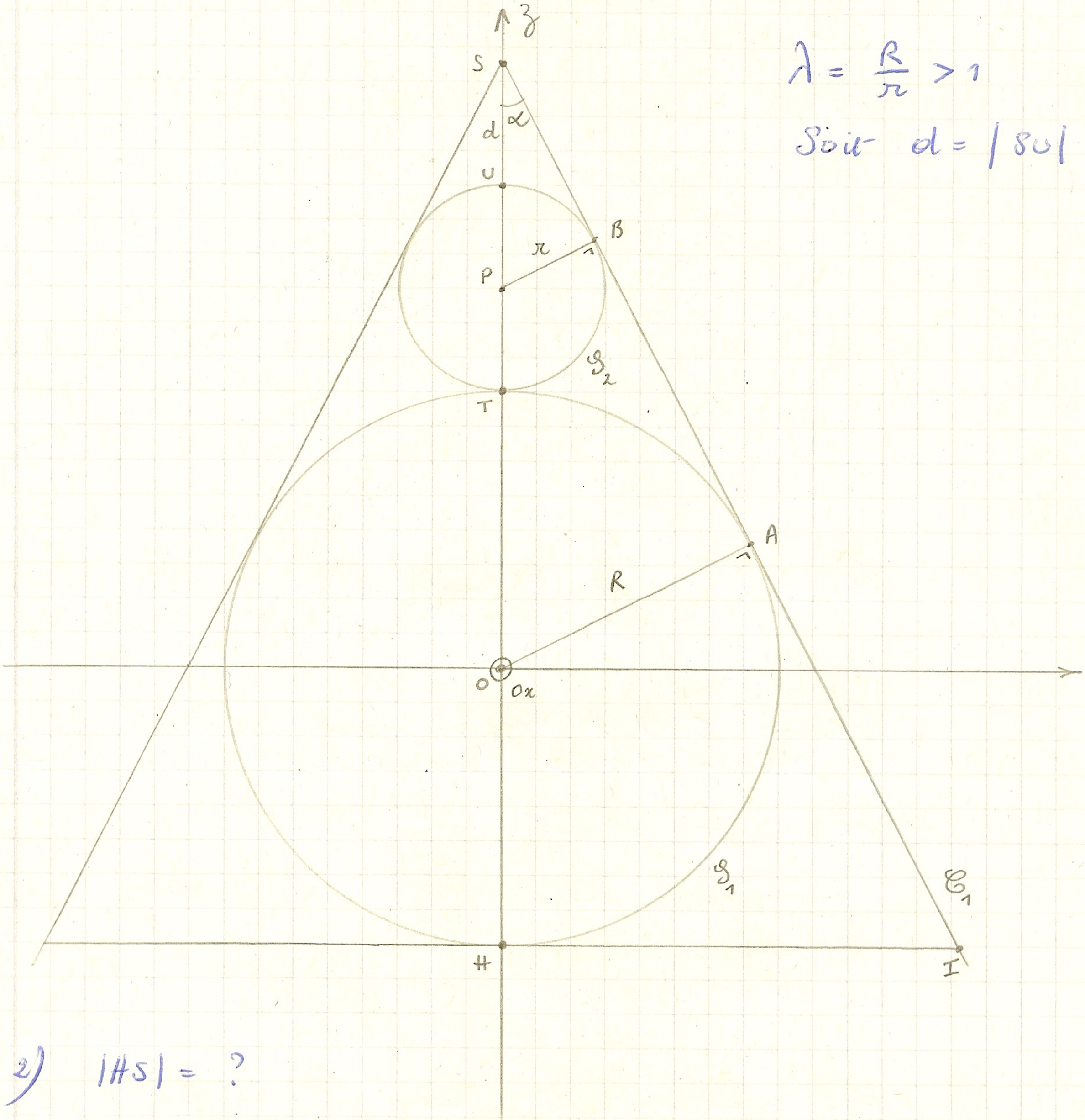
Or $D\left(\frac{3}{4}L, \frac{3}{4}L \tan 30°\right) = \left(\frac{3}{4}L, \frac{\sqrt{3}}{4}L\right) \in \mathscr{C}$.

$= \left(\frac{15\sqrt{3}}{4}, \frac{15}{4}\right) \in \mathscr{C}$

$\rightarrow$ $\frac{675}{16b^2} + \frac{225}{16 \cdot 225} = 1$ $\rightarrow \frac{675}{b^2} + 1 = 16 \rightarrow \frac{675}{b^2} = 15 \rightarrow b^2 = 45$

Géométrie dans l'espace

1) Plutôt qu'une représentation en perspective, adoptons une vue latérale.



$\lambda = \frac{R}{r} > 1$

Soit $d = |SU|$

2) $|HS| = ?$

$|HS| = 2R + 2r + d$

Les triangles OAS et PBS sont semblables : $\frac{|SO|}{|SP|} = \frac{R}{r} = \lambda$

$\rightarrow \quad \frac{R + 2r + d}{r + d} = \lambda$

$\cancel{R} + 2r + d = \cancel{\lambda r} + \lambda d \qquad (\text{car } R = \lambda r)$

$\rightarrow \quad d = \frac{2r}{\lambda - 1}$

$|HS| = 2R + 2r + \frac{2r}{\lambda-1} = 2\lambda r + 2r + \frac{2r}{\lambda-1} = 2r\left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda-1}\right)$

$= 2r \cdot \frac{\lambda^2 \cancel{-\lambda} \cancel{+\lambda} \cancel{-1} \cancel{+1}}{\lambda - 1}$

$$\boxed{|HS| = 2r \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda - 1}}$$

3) $r = 1,75$ or $\lambda = 3$ $R = 5,25$

$$V_{cône} = \frac{\pi . |HI|^2 . |HS|}{3}$$

$$|HS| = \cancel{2} . 1,75 . \frac{9}{\cancel{2}} = 15,25$$

$|HI|$ = rayon de la base du cône = ?

Cherchons l'angle $\alpha = P\hat{S}B$

$$\sin \alpha = \frac{r}{d+r} \quad \text{or} \quad d = \frac{2 . 1,75}{3-1} = 1,75$$

$$\rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1,75}{1,75 + 1,75} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 30°$$

donc $|HI| = |HS| . \tan 30° = 15,25 . \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 77,520833...$

$$\boxed{V_{cône} = \frac{\pi . (232,5625 . \frac{1}{3}) 15,25}{3} \simeq 1237,9893 \ (m^3)}$$

4) Centre de S_2 : $P(0, 0, \underbrace{R+r}_{5,25+1,75}) = (0,0,7)$

Point de percée G de Ox dans S_1 : $(R, 0, 0) = (5,25 ; 0 ; 0)$

$\pi // Oy \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de π.

$\vec{v} = \vec{GP}\begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ R+r \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de π

$$\rightarrow \quad \pi \equiv \begin{cases} x = -\mu R + R & (1) \\ y = \lambda & (2) \\ z = (R+r)\mu & (3) \end{cases}$$

de (3) : $\mu = \frac{z}{R+r}$ dans (1) : $x = -\frac{z}{R+r} . R + r$

$$\longrightarrow \quad (R+r)x = -zR + r(R+r)$$

$$\boxed{\pi \equiv (R+r)x + zR - r(R+r) = 0}$$

en particulier : $\pi \equiv 7x + 5,25 . z + 12,25 = 0$

$$\boxed{\pi \equiv 28x + 21z + 49 = 0}$$

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2019 -

Série C

Géométrie plane

Dans un repère Oxy, on dessine le cercle $\mathcal{C}_1$ de rayon R_1. On trace la droite a horizontale et tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ et la droite b également tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ faisant un angle α avec a. On demande :

1. de faire une figure et d'expliquer comment construire le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ tangent à la fois à a, b et $\mathcal{C}_1$ (le rayon R_2 de $\mathcal{C}_2$ est inférieur à R_1) ;
2. de déterminer R_2 en fonction de R_1 et α ;
3. si le repère est tel que l'origine est à l'intersection de a et b, déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_2$ dans le cas où R_1 vaut 4 unités de longueur et α mesure 40°.

Géométrie spatiale

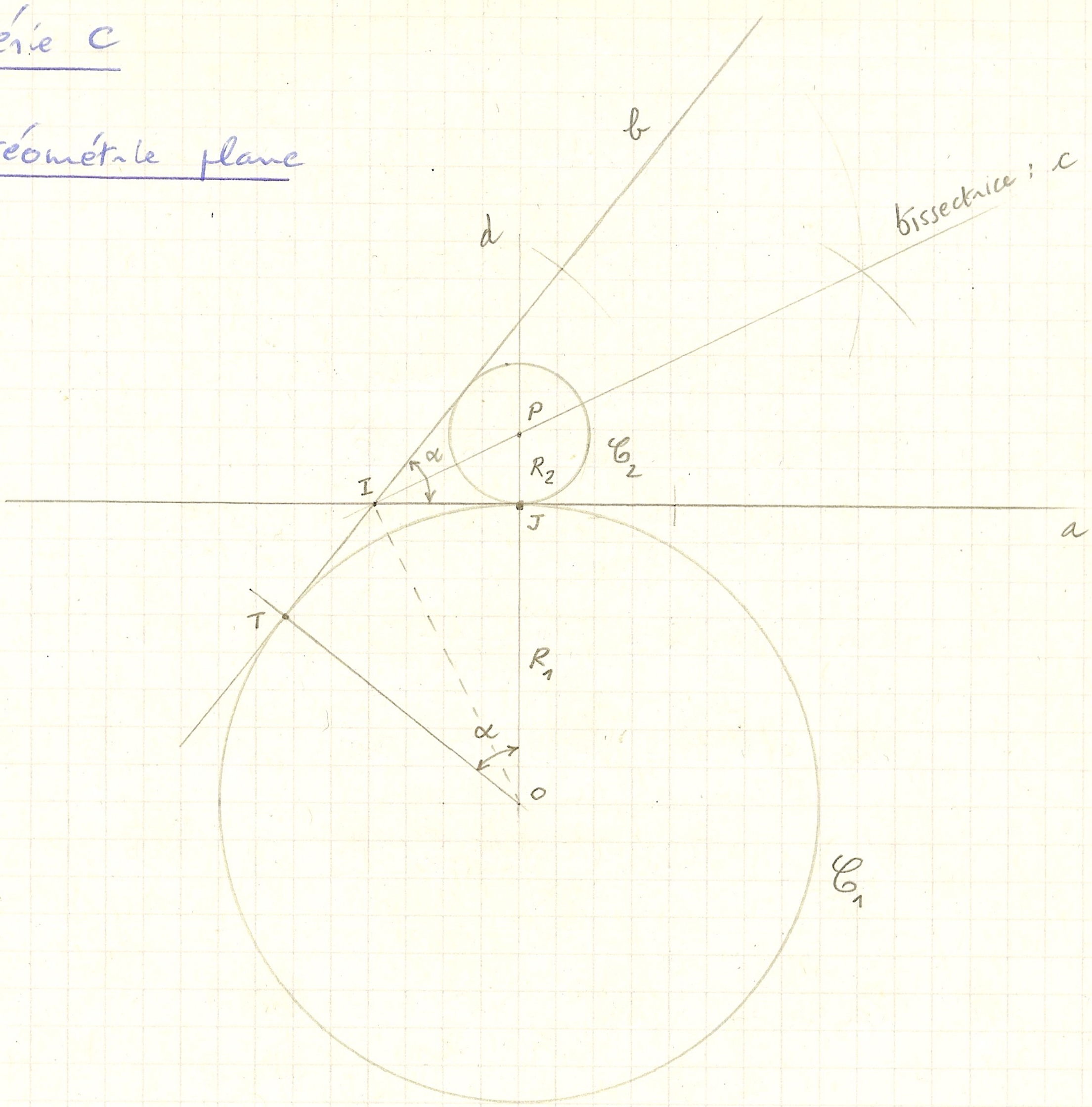
Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les coordonnées de trois points : $A(1,2,3)$, $B(2,4,1)$ et $P(4,6,7)$. On demande :

1. de déterminer les équations paramétriques et l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et P ;
2. de déterminer les coordonnées des points C et D tels que $ABCD$ soit un losange dessiné dans le plan π dont la diagonale est portée par la droite AP ;
3. de déterminer le volume du solide engendré par la rotation du losange autour de sa diagonale AC.

Série c

Géométrie plane

1)



1°/ Construire la bissectrice de $a\hat{I}b$ (c)

2°/ Construire la perpendiculaire à la droite a passant par le centre O de $\mathcal{C}_1$ (d)

3°/ $c \cap d = \{P\}$ P est le centre de $\mathcal{C}_2$

2) Dans le Δ rectangle IJP : $R_2 = |IJ| . \tan\frac{\alpha}{2}$

" " " IJO : $|IJ| = R_1 . \tan\frac{\alpha}{2}$

$\longrightarrow$ $\boxed{R_2 = R_1 . \tan^2\frac{\alpha}{2}}$

3) $R_1 = 4$ $\alpha = 40°$ $|IJ| = 4 . \tan 20°$

$R_2 = 4 . \tan^2 20°$

$\longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{C}_2 \equiv (x - 4.\tan 20°)^2 + (y - 4\tan^2 20°)^2 = 16 . \tan^4 20°}$

si $\alpha = 60°$ $\mathcal{C}_2 \equiv (x - \frac{4\sqrt{3}}{3})^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$

Géométrie spatiale

$A(1,2,3)$ $\quad B(2,4,1)$ $\quad$ et $\quad P(4,6,7)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{BP}\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu + 1 & (1)\\ y = 2\lambda + \mu + 2 & (2)\\ z = -2\lambda + 3\mu + 3 & (3)\end{cases}}$

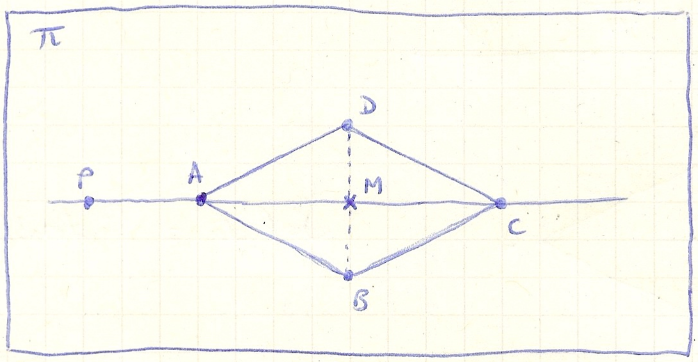
$2\times(1) + (3)$: $\quad 2x + z = 5\mu + 5 \quad (4)$

$(2) + (3)$: $\quad y + z = 4\mu + 5 \quad (5)$

$4\times(4) - 5\times(5)$: $\quad 8x + 4z - 5y - 5z = \cancel{20\mu} + 20 - \cancel{20\mu} - 25$

$\longrightarrow \quad \boxed{\pi \equiv 8x - 5y - z + 5 = 0} \quad (4)$

2) C et D tels que ABCD soit un losange dans π dont la diagonale est portée par la droite AP ?



Idée : Cherchons le plan α, comprenant B et perpendiculaire à π.

Le point de percée de AP dans α sera le point M, centre du losange.

$\vec{AP}\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de α $\rightarrow$ $\alpha \equiv 3x + 4y + 4z + d = 0$

$B(2,4,1) \in \alpha \rightarrow 6 + 16 + 4 + d = 0 \rightarrow d = -26$

$\boxed{\alpha \equiv 3x + 4y + 4z - 26 = 0} \quad (5)$

$AP \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 1\\ y = 4\lambda + 2\\ z = 4\lambda + 3\end{cases} \xrightarrow{(5)} 9\lambda + 3 + 16\lambda + 8 + 16\lambda + 12 - 26 = 0$

$41\lambda - 3 = 0 \longrightarrow \lambda = 3/41$

$M \begin{cases} x = \frac{9}{41} + 1\\ y = \frac{12}{41} + 2\\ z = \frac{12}{41} + 3\end{cases} \longrightarrow \boxed{M\left(\frac{50}{41}, \frac{94}{41}, \frac{135}{41}\right)}$ milieu de $\begin{cases}[AC]\\ [BD]\end{cases}$

$\longrightarrow$

Calcul du point D

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BM} + \underbrace{\vec{MD}}_{=\vec{BM}} = \vec{OB} + 2\vec{BM}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{50}{41} - 2 \\ \frac{94}{41} - 4 \\ \frac{135}{41} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -32/41 \\ -70/41 \\ 94/41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{41} \\ \frac{24}{41} \\ \frac{229}{41} \end{pmatrix}$$

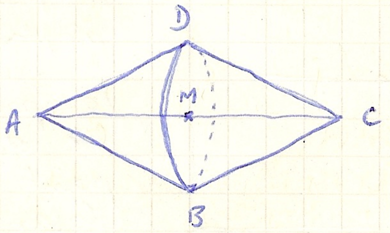
$\rightarrow$ $\boxed{D\left(\frac{18}{41}, \frac{24}{41}, \frac{229}{41}\right)}$

Calcul du point C

$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = \vec{OD} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 18/41 \\ 24/41 \\ 229/41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $\boxed{C\left(\frac{59}{41}, \frac{106}{41}, \frac{147}{41}\right)}$

3)



Solide = "double-cône"

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rayon } |BM| \\ \text{hauteur } |AM| \end{array} \right.$

$\rightarrow$ $$V = 2 \cdot \frac{\pi \cdot |BM|^2 \cdot |AM|}{3}$$

$$|BM|^2 = \left(\frac{50}{41} - 2\right)^2 + \left(\frac{94}{41} - 4\right)^2 + \left(\frac{135}{41} - 1\right)^2 \simeq 8,780487805$$

$$|AM|^2 = \left(\frac{50}{41} - 1\right)^2 + \left(\frac{94}{41} - 2\right)^2 + \left(\frac{135}{41} - 3\right)^2 = \frac{9}{41} \simeq 0,219512195$$

$\rightarrow |AM| \simeq 0,468521286$

$\rightarrow$ $\boxed{V \simeq 8,61602 \text{ (uv)}}$