Juillet 2021

3a Soit deux polygones réguliers à n côtés, l'un noté I, inscrit dans un cercle de rayon r et l'autre noté C, circonscrit à ce même cercle. Soit P_I le périmètre de I et P_C le périmètre de C. Calculez le rapport P_C / P_I en fonction de n uniquement.

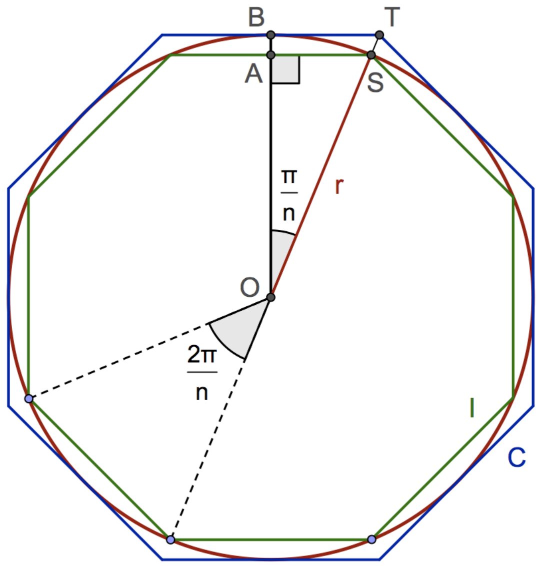
Solution

Rappelons d'abord que pour un polygone régulier à n côtés, l'angle au centre qui intercepte un seul côté du polygone a pour amplitude $2\pi / n$.

Dans la figure ci-contre, l'angle $A\hat{O}S$ a donc pour amplitude π / n.

Pour calculer le rapport des périmètres des polygones, il suffit de calculer celui entre leurs côtés ou de leurs « demi-côtés ».

Par exemple : $\dfrac{P_C}{P_I} = \dfrac{|BT|}{|AS|}$.



Les triangles AOS et BOT étant semblables, nous avons $\dfrac{|BT|}{|AS|} = \dfrac{|OB|}{|OA|} = \dfrac{r}{|OA|}$.

Dans le triangle rectangle AOS, nous avons : $|OA| = |OS|.\cos(A\hat{O}S) = r.\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Conclusion : $\boxed{\dfrac{P_C}{P_I} = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}$.

3b Calculer en simplifiant votre expression au maximum : $tan(75°) = \ldots$.

Solution

$$\tan(75°) = \tan(45° + 30°) = \frac{\tan(45°) + \tan(30°)}{1 - \tan(45°).\tan(30°)} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right).\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

3c Dans un triangle ABC, si

$$\cos^2\left(\hat{A}-\hat{B}\right)-\cos\left(2\hat{A}\right).\cos(2\hat{B})=\frac{1}{2} \ ,$$

calculez l'angle $\hat{C}$ sachant qu'il est obtus. Votre réponse sera exprimée en degrés.

Solution

Développons le premier membre de l'égalité :

$$\cos^2\left(\hat{A}-\hat{B}\right)-\cos\left(2\hat{A}\right).\cos\left(2\hat{B}\right)$$

$$=\left(\cos\hat{A}.\cos\hat{B}+\sin\hat{A}.\sin\hat{B}\right)^2-\left(\cos^2\hat{A}-\sin^2\hat{A}\right).\left(\cos^2\hat{B}-\sin^2\hat{B}\right)$$

$$=\cos^2\hat{A}.\cos^2\hat{B}+2.\cos\hat{A}.\cos\hat{B}.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}+\sin^2\hat{A}.\sin^2\hat{B}$$
$$-\cos^2\hat{A}.\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{A}.\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{A}.\cos^2\hat{B}-\sin^2\hat{A}.\sin^2\hat{B}$$

$$=\cos^2\hat{A}.\sin^2\hat{B}+2.\cos\hat{A}.\cos\hat{B}.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}+\sin^2\hat{A}.\cos^2\hat{B}$$

$$=\left(\cos\hat{A}.\sin\hat{B}+\sin\hat{A}.\cos\hat{B}\right)^2$$

$$=\sin^2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$$

Donc : $\sin^2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \sin\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme nous sommes dans un triangle, seul le sinus positif est à retenir et donc :

$$\hat{A}+\hat{B}=45° \quad \rightarrow \quad \hat{C}=180°-45°=135° \ .$$

3d Calculez $E=\sin\left(\frac{\pi}{24}\right).\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right).\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right).\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)$.

Solution

Utilisons la formule suivante pour transformer un produit de sinus en somme (inversion d'une formule de SIMPSON) :

$$\sin a.\sin b=-\frac{1}{2}.\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{24}\right).\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)=-\frac{1}{2}.\left(\cos\left(\frac{6\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{-4\pi}{24}\right)\right)=-\frac{1}{2}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{24}\right).\sin\left(\frac{7\pi}{24}\right)=-\frac{1}{2}.\left(\cos\left(\frac{18\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{24}\right)\right)=-\frac{1}{2}.\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Et donc : $E=-\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{16}.\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{16}.(-1)=\frac{1}{16}$.

3e Sachant que $\tan(x)+\tan(y)+\tan(x).\tan(y)=1$, que vaut l'angle $(x+y)\in[0,\pi]$ exprimé en radians ?

Solution

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\tan(x)+\tan(y)+\tan(x).\tan(y)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(x)+\tan(y)=1-\tan(x).\tan(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x).\tan(y)}=1 \\
&\Leftrightarrow \quad \tan(x+y)=1
\end{aligned}$$

Et donc : $x+y=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$. Comme $(x+y)\in[0,\pi]$, nous concluons que $\boxed{x+y=\frac{\pi}{4}}$.

3f Soit un triangle ABC rectangle en A . Le rayon du cercle circonscrit à ABC est égal à 2 . La longueur du côté AB est égale à $\sqrt{7}$. Calculez $\cos(\hat{B}-\hat{C})$.

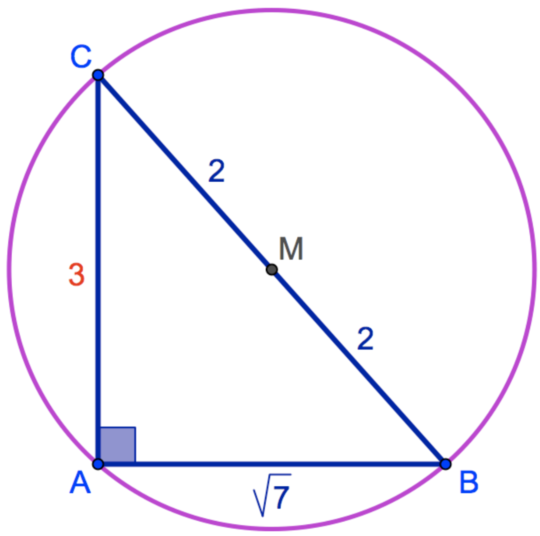
Solution

Si un cercle est circonscrit à un triangle rectangle, alors l'hypoténuse de celui-ci est un diamètre du cercle.

Comme le rayon du cercle vaut 2 , nous en déduisons que l'hypoténuse mesure 4 : $|BC|=4$.

Le théorème de PYTHAGORE nous permet alors de trouver le troisième côté du triangle :

$$|AC|^2=|BC|^2-|AB|^2=16-7=9 \quad \rightarrow \quad |AC|=3 .$$



Connaissant les trois côtés du triangle, nous pouvons calculer tous les nombres trigonométriques dont nous avons besoin (« sohcahtoa »).
Notons aussi que, comme le triangle est rectangle : $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}$ et $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$.

$$\begin{aligned}
\cos(\hat{B}-\hat{C}) \quad &= \quad \cos\hat{B}.\cos\hat{C}+\sin\hat{B}.\sin\hat{C} \\
&= \quad \frac{\sqrt{7}}{4}.\frac{3}{4}+\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \rightarrow \quad \boxed{\cos(\hat{B}-\hat{C})=\frac{3\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}$$

Septembre 2021

3a Calculez la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

<u>Solution</u>

La façon la plus simple de travailler est d'utiliser la formule relative à $\cos(a - b)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(15°) = \cos(60° - 45°) = \cos(60°).\cos(45°) + \sin(60°).\sin(45°)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Si l'étudiant choisit de partir du fait que $30°$ est le double de $15°$, cela peut donner ceci :

$$\cos(30°) \overset{Carnot}{=} 2.\cos^2(15°) - 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2(15°) = \frac{\cos(30°)+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \quad .$$

Il obtient alors : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ (évidemment, seule la solution positive est à retenir).

3b Calculez la valeur exacte de $\cos(5x)$ sachant que $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>Solution</u>

$$\cos(5x) = \cos(4x + x) = \cos(4x).\cos(x) - \sin(4x).\sin(x)$$

Calculons d'abord $\cos(4x)$:

$$\cos(4x) = 2.\cos^2(2x) - 1 = 2.\left(2.\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1 = 2.\left(2.\frac{1}{3} - 1\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9} \; .$$

Au passage, notons que $\cos(2x) = 2.\dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$.

Calculons maintenant l'expression $\sin(4x) . \sin(x)$:

$$\sin(4x).\sin(x) = 2.\underline{\sin(2x)}.\cos(2x).\sin(x) = 2.\underline{2.\sin(x).\cos(x)}.\cos(2x).\sin(x)$$

$$= 4.\sin^2(x).\cos(x).\cos(2x) = 4.\left(1 - \cos^2 x\right).\cos(x).\cos(2x)$$

$$= 4.\left(1 - \frac{1}{3}\right).\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{-1}{3} = \frac{-8}{9\sqrt{3}} \; .$$

Finalement : $\cos(5x) = -\dfrac{7}{9}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{-8}{9\sqrt{3}} = \dfrac{1}{9\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{27}$.

Peut-être y a-t-il un chemin plus court pour arriver à cette solution …

3c Trouvez les réels a et b tels que l'expression soit vérifiée pour tout réel x :

$$\sin^3(x) = a.\sin(x) + b.\sin(3x) \quad .$$

Solution

L'idée est de trouver une expression pour $\sin(3x)$ en fonction uniquement de $\sin(x)$.

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin(2x).\cos(x) + \sin(x).\cos(2x)\\ &= 2.\sin(x).\cos(x).\cos(x) + \sin(x).\cos(2x)\\ &= 2.\sin(x).\cos^2(x) + \sin(x).\left(1 - 2.\sin^2(x)\right)\\ &= 2.\sin(x).\left(1 - \sin^2(x)\right) + \sin(x) - 2.\sin^3(x)\end{aligned}$$

Finalement : $\sin(3x) = 3.\sin(x) - 4.\sin^3(x)$.

Isolons $\sin^3(x)$: $\sin^3(x) = \dfrac{\sin(3x) - 3.\sin(x)}{-4} = \dfrac{3}{4}.\sin(x) - \dfrac{1}{4}.\sin(3x)$.

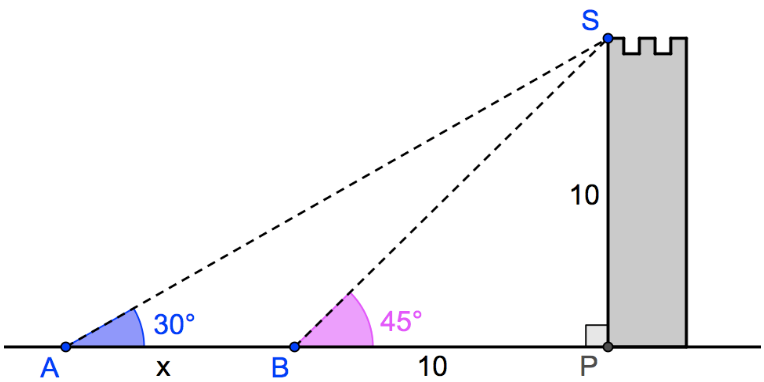
Comparant avec l'expression demandée dans l'énoncé, nous trouvons : $\boxed{a = 3/4 \text{ et } b = -1/4}$.

3d Le sommet d'une tour verticale de 10 mètres de hauteur est vu depuis deux points au sol (qui est supposé horizontal). Ces points sont alignés avec le pied de la tour et voient le sommet de la tour respectivement sous des angles de $30°$ et de $45°$.
Quelle est la distance entre ces deux points, exprimée au mètre près ?

Solution

Soient A et B les deux points au sol d'où l'on vise le sommet S de la tour ; soit P le pied de celle-ci.

Dans le triangle rectangle BPS , comme $S\hat{B}P = 45°$, nous avons aussi $|BP| = 10$.



Dans le triangle rectangle APS , nous avons :

$$\tan(30°) = \frac{10}{x+10} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x+10} \quad \rightarrow \quad x + 10 = 10\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 7{,}32\ (m) \ .$$

Sans calculatrice, on est sensé savoir que $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ et on obtient : $\boxed{x = 7\ (m)}$.

3e Soit un triangle quelconque ABC dont l'aire est de 50 mètres carrés.
Le côté $[BC]$ mesure 10 mètres, l'angle en C est de $30°$.
Que vaut la longueur du côté $[AB]$ opposé à l'angle C ? On prendra $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

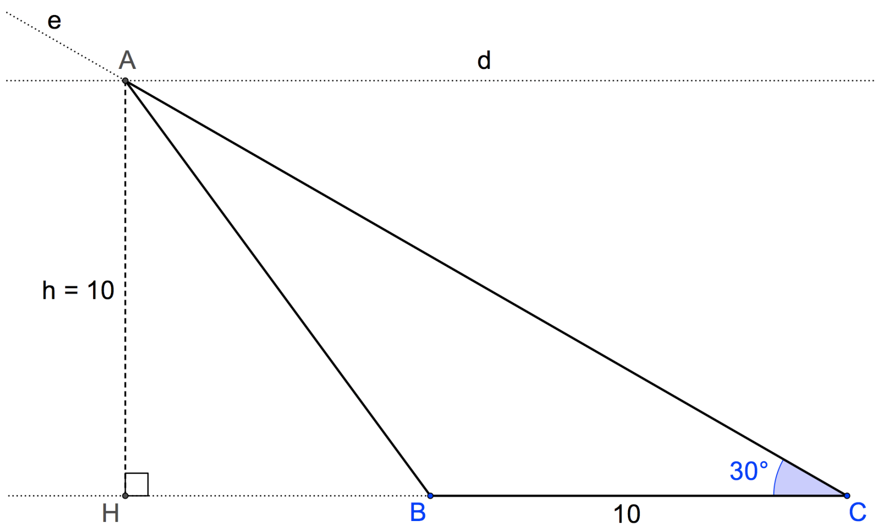
<u>Solution</u>

Prenons $[BC]$ comme base et soit h la hauteur relative à cette base.

La formule de l'aire du triangle permet de trouver h : $\dfrac{|BC|.h}{2} = 50 \quad \to \quad \dfrac{10.h}{2} = 50 \quad \to \quad h = 10$.

Voici alors une représentation possible de la situation.

Après avoir construit un angle de $30°$ en C , tracer une droite d parallèle à BC à une distance 10 de celle-ci. L'intersection de la demi-droite e issue de C est le sommet A .



Dans le triangle rectangle AHC , nous avons : $\sin(30°) = \dfrac{10}{|AC|} \quad \to \quad |AC| = \dfrac{10}{\sin(30°)} = \dfrac{10}{1/2} = 20$.

Le théorème d'AL KASHI permet de trouver $|AB|$:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2.|AC|.|BC|.\cos\hat{C} = 400 + 100 - 400.\frac{\sqrt{3}}{2} = 500 - 200.\sqrt{3} \; .$$

Si nous prenons l'approximation proposée pour $\sqrt{3}$, nous obtenons :

$$\boxed{|AB|^2 \approx 160 \quad \to \quad |AB| \approx 4\sqrt{10} \approx 12{,}7} \quad \text{(en prenant } \sqrt{10} \approx 3{,}16\text{ !) .}$$

La réponse attendue était 12,4 mètres (mais ceux qui ont rédigé la question … avaient une calculette et ont directement pris la racine de $500 - 200\sqrt{3}$ ☺).

Dans la case réponse, peut-être vaut-il mieux simplement écrire : $\boxed{|AB| = \sqrt{500 - 200.\sqrt{3}}}$

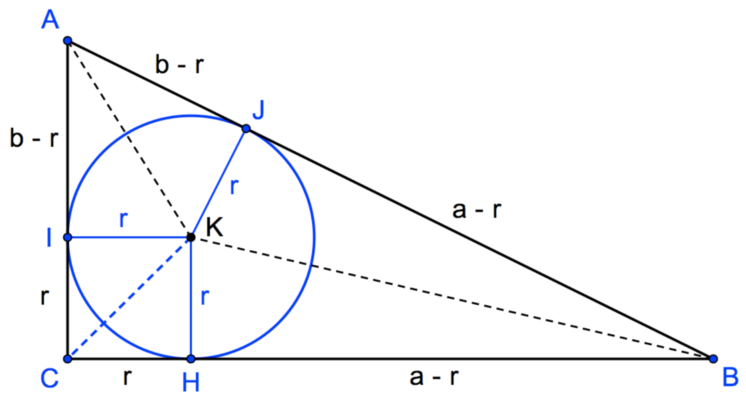
<u>Autre façon</u> : calculer d'abord $|HC| = 10.\cot(30°) = 10\sqrt{3}$; on en déduit $|HB| = 10\sqrt{3} - 10$ et on calcule $|AB|$ en utilisant le théorème de PYTHAGORE dans le triangle rectangle AHB .

3f Soit ABC un triangle rectangle en C. Soit a la longueur du segment $[BC]$, b la longueur du segment $[AC]$ et c la longueur du segment $[AB]$.
Exprimez le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ABC en fonction de a, b et c.

Solution

Première méthode (compliquée mais instructive quand même ☺)

Soit K le centre du cercle inscrit, c'est-à-dire le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle. Le cercle inscrit est tangent aux trois côtés et nous pouvons donc tracer trois segments perpendiculaires à ceux-ci : $[KH]$, $[KI]$ et $[KJ]$.
Chacun de ces segments a pour longueur r, le rayon du cercle.



Comme le triangle est rectangle en C, nous avons directement : $|CH| = r$ et $|CI| = r$.
Nous en déduisons : $|HB| = a - r$ et $|IA| = b - r$.
Les triangles BHK et BJK étant isométriques(*), nous avons aussi : $|JB| = a - r$ et $|JA| = b - r$.
L'hypoténuse, de mesure c, a donc aussi pour mesure $|JB| + |JA| = a + b - 2r$.
Appliquant le théorème de PYTHAGORE, nous trouvons successivement :

$$c^2 = a^2 + b^2 \iff (a+b-2r)^2 = a^2 + b^2 \iff a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = a^2 + b^2$$

$$\iff 4r^2 - 4(a+b)r + 2ab = 0 \iff 2r^2 - 2(a+b)r + ab = 0$$

Résolvons cette équation du second degré d'inconnue r :

$$\Delta = 4(a+b)^2 - 8ab = 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 8ab = 4\left(a^2 + b^2\right) ,$$

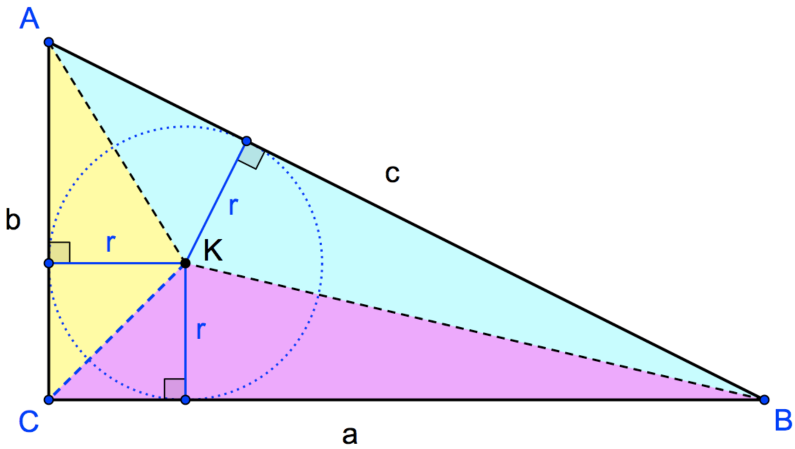
$$r = \frac{2(a+b) \pm 2\sqrt{a^2+b^2}}{4} = \frac{a+b\pm c}{2} .$$

Nous ne pouvons pas choisir le signe « + » car cela signifierait que le rayon du cercle inscrit serait égal au demi périmètre du triangle, ce qui évidemment impossible.

Conclusion : $\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$.

(*) BK étant une bissectrice, les angles $H\hat{B}K$ et $I\hat{B}K$ ont la même amplitude.
Les triangles rectangles BHK et BJK ont ainsi trois angles deux à deux de même amplitude tout en ayant le côté $[BK]$ en commun. Ils sont donc isométriques.

Seconde méthode (la plus élégante mais je n'y ai pas pensé tout de suite …)



L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AKB, AKC et BKC.
Comme le triangle ABC est rectangle, si nous prenons comme base a, alors la hauteur est b.
Pour chacun des trois « petits » triangles, nous pouvons prendre comme base un des côtés de ABC et la hauteur relative à cette base sera chaque fois égale à r.

$$Aire(ABC) = Aire(AKB) + Aire(AKC) + Aire(BKC)$$

$$\frac{ab}{2} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ab = cr + br + ar \quad \Leftrightarrow \quad ab = (a+b+c)r$$

Conclusion : $\boxed{r = \dfrac{ab}{a+b+c}}$.

Bien que d'apparence différente, cette réponse est parfaitement équivalente à celle obtenue par la première méthode.

En effet : $$\frac{a+b-c}{2} \stackrel{?}{=} \frac{ab}{a+b+c} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b-c)(a+b+c) \stackrel{?}{=} 2ab$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 \stackrel{?}{=} 2ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \stackrel{?}{=} 2ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ab = 2ab \qquad \text{(car } a^2 + b^2 = c^2 \text{)}$$

A. VANDENBRUAENE