(10) Pour simplifier, supposons que l'année compte 365 jours.

Nous allons former des vecteurs à 12 composantes :
la première composante est l'anniversaire de la personne 1
la deuxième " " " " " " 2
etc.

Pour chaque personne, il y a 365 possibilités d'anniversaire et il y a donc 365^{12} vecteurs de ce type :

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}, a_{12})$$

$$365 \times 365 \times 365 \times \dots \times 365 \times 365 = 365^{12}$$

→ c'est notre "nombre de cas possibles".

a) Soit E l'événement "il y a au moins 2 personnes ayant leur anniversaire le même jour".

L'événement contraire $\overline{E}$, négation de E est :

"les 12 personnes ont 12 anniversaires différents".

Combien y a-t-il de cas favorables à $\overline{E}$?

$$365 \times 364 \times 363 \times 362 \times 361 \times \dots \times 354$$

la 2^e personne ne peut avoir le même anniversaire que la 1ère

la 3^e personne ne peut avoir le même anniversaire qu'une des 2 premières

$(365-12+1)$

En fait, il s'agit de A_{365}^{12}.

Donc, $P(\overline{E}) = \dfrac{A_{365}^{12}}{365^{12}} \simeq \dfrac{4{,}6574 \cdot 10^{30}}{5{,}5913 \cdot 10^{30}} \simeq 0{,}8330$

Et donc $P(E) \simeq 0{,}1670$. Dans un groupe de 12 personnes, il y a environ 16,7 % de chances qu'au moins deux d'entre elles aient le m̂ anniv.

b) Soit n le nombre de personnes à rassembler.

Il faut que $1 - \dfrac{A_{365}^{n}}{365^{n}} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{A_{365}^{n}}{365^{n}} < \dfrac{1}{2}$.

Inutile d'essayer de résoudre ce genre d'inéquation.
Essayez plutôt des valeurs pour n (avec un tableur par exemple) et vous verrez qu'il faut $n \geqslant 23$. Dans la plupart des classes de notre école, il y a donc environ 1 chance sur 2 qu'au moins 2 élèves aient le même anniversaire !