Question 1

Simplifier l'expression ci-dessous, où a et b sont des nombres réels et n est un nombre naturel impair.

$$\frac{\left(-a^{-2}\right)^{-n} a^4 \left(ab^3\right)^{-2}}{\left(\frac{-b}{a^2}\right)^{-(n+2)}} \cdot \left(\frac{a}{-b^{-2}}\right)^n \qquad \text{avec } a\,,b \neq 0\,,\ n \neq 0$$

Solution

Il y a de nombreuses façons de simplifier cette expression.
Ci-dessous, nous transformons d'abord les puissances dont l'exposant est affecté d'un signe « - » .
Ensuite, nous appliquons les règles de calcul habituelles sur les puissances, en tenant compte du fait que n est impair et donc que $n+2$ l'est aussi.

$$\frac{\left(-a^{-2}\right)^{-n} a^4 \left(ab^3\right)^{-2}}{\left(\frac{-b}{a^2}\right)^{-(n+2)}} \cdot \left(\frac{a}{-b^{-2}}\right)^n = \frac{-a^{2n}\, a^4 \left(\frac{-b}{a^2}\right)^{n+2}}{\left(ab^3\right)^2} \cdot \left(-ab^2\right)^n = \frac{-a^{2n}\, a^4\, \frac{-b^{n+2}}{a^{2n+4}}}{a^2 b^6} \cdot \left(-a^n\right) b^{2n}$$

$$= \frac{-a^{2n+4}\left(-a^n\right)}{a^2\, a^{2n+4}} \cdot \frac{-b^{n+2}\, b^{2n}}{b^6} = -a^{n-2} \,.\, b^{3n-4}$$

Réponse B

Question 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2x-6}{x+2}$.

Déterminez l'équation de la tangente au graphique de f là où il coupe l'axe des x .

Solution

Le graphique de f coupe l'axe des x au point T(-3,0) .

En effet $f(x) = \dfrac{-2x-6}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \left(-2x-6=0\right) \wedge \left(x \neq -2\right) \Leftrightarrow \left(x=-3\right) \wedge \left(x \neq -2\right)$.

Nous savons que l'équation d'une tangente non verticale au graphique d'une fonction f en son point $(a\,, f(a))$ est donnée par la formule

$$\boxed{t \equiv y - f(a) = f'(a).\left(x-a\right)} \,.$$

L'équation de la tangente en T au graphique de f est donc : $t \equiv y - 0 = f'(-3).\left(x+3\right)$.

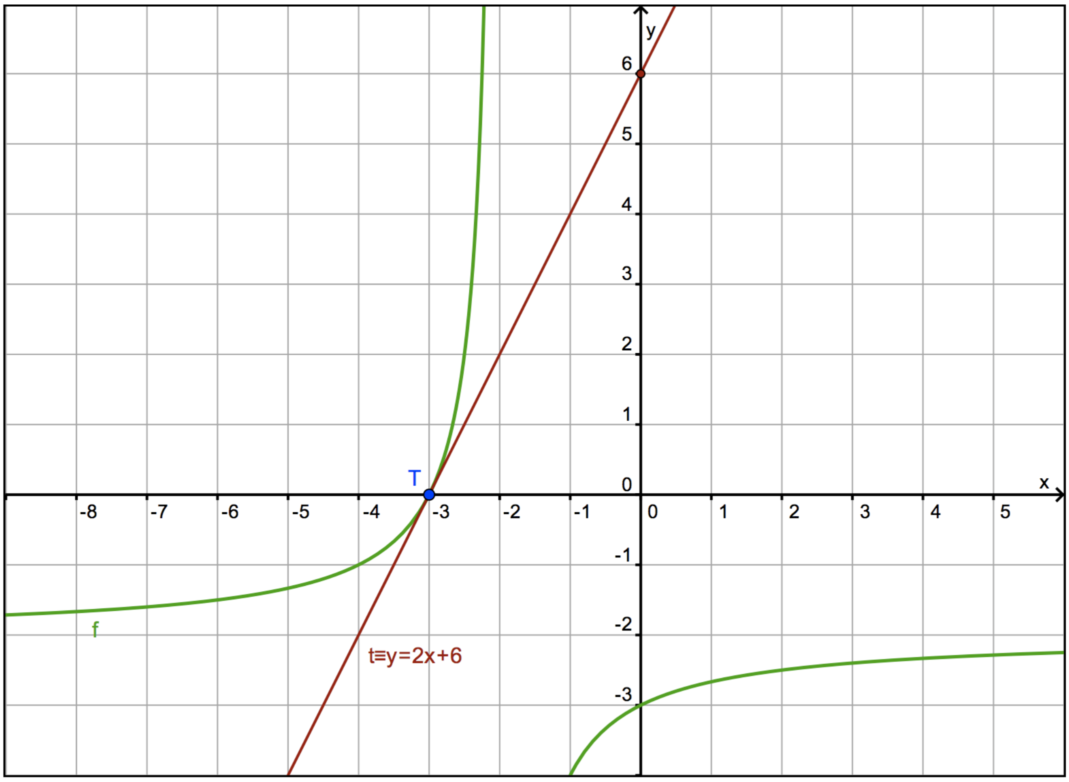
La pente de t est le nombre dérivé de f en - 3 .

Calculons d'abord la fonction dérivée de f :

$$f'(x)=\frac{(-2x-6)'(x+2)-(-2x-6)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{-2.(x+2)-(-2x-6).1}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}\ .$$

Donc $f'(-3)=2$ et $t\equiv y=2.(x+3) \iff t\equiv y=2x+6$.

Réponse A



Question 3

Nous savons que $x\,,y\in R_0^+$ et $x<y$.

Laquelle des inéquations suivantes est-elle satisfaite $\forall\ x<y$?

Solution

(A) Comme $1+x>0$ et $1+y>0$, nous pouvons multiplier les deux membres de l'inégalité (A) en conservant le sens de l'inégalité :

$$\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y} \iff x(1+y)<y(1+x) \iff x+xy<y+xy \iff x<y\ .$$

La proposition (A) est donc correcte.

(B) L'inégalité $x\,(1+x)>y$ n'est pas toujours vérifiée.
Un simple contre-exemple suffit à le prouver : si $x=1$ et $y=2$, nous avons bien $x<y$ mais l'inégalité $1\,(1+1)>2$ est fausse.

(C) Comme $1+x^2>0$ et $1+y^2>0$, nous pouvons multiplier les deux membres de l'inégalité en conservant le sens de l'inégalité :

$$\frac{-x^2}{1+x^2}>\frac{-y^2}{1+y^2} \Leftrightarrow -x^2\left(1+y^2\right)>-y^2\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow -x^2-x^2y^2>-y^2-x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2>-y^2 \Leftrightarrow x^2<y^2 .$$

Or, dans R_0^+, la fonction « carré » étant strictement croissante [1], l'inégalité $x^2<y^2$ est équivalente à $x<y$.

La proposition (C) est donc correcte.

Remarque : ce n'est pas vrai dans R_0^- ; en effet, la fonction « carré » y est strictement décroissante. Si un nombre négatif est strictement inférieur à un autre nombre négatif, le carré du premier sera supérieur au carré du second : $-5<-4$ mais $25>16$.

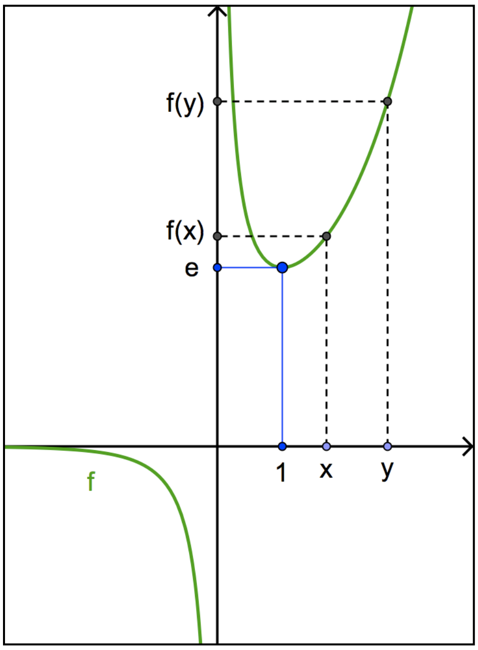
Nous pouvons déjà en déduire que la réponse est (E).

Voyons tout de même la dernière inégalité.

(D) Un contre-exemple permet de deviner que l'inégalité $\frac{e^x}{x}>\frac{e^y}{y}$ est fausse.

Si $x=1$ et $y=2$, nous avons bien $x<y$ mais $\frac{e^1}{1}>\frac{e^2}{2}$ est fausse car $e\approx 2{,}7$ et $e^2/2\approx 3{,}7$.

Une façon plus rigoureuse d'aborder cette inégalité est d'étudier la fonction $f(x)=\frac{e^x}{x}$ (elle est de celle qu'on étudie couramment en 6e secondaire).



L'étude des variations par la dérivée première montre que f est strictement décroissante dans $]\,0\,,\,1\,]$ et strictement croissante dans $[\,1\,,+\infty\,[$.
Elle présente un minimum local en $x=1$.

La fonction étant strictement croissante dans $[\,1\,,+\infty\,[$ qui est une partie de R_0^+, nous en déduisons :

$$\exists\ x\,,y \in R_0^+ : x<y \text{ et } f(x)<f(y) \text{ c'est-à-dire } \frac{e^x}{x}<\frac{e^y}{y} .$$

La proposition (D) est fausse.

Conclusion : les inégalités (A) et (C) sont correctes.

Réponse E

---

[1] C'est l'occasion d'aller revoir la théorie :

$$f \text{ est strictement croissante dans } R_0^+ \Leftrightarrow \forall\, x,y\in R_0^+ : x<y \Rightarrow f(x)<f(y) .$$

Question 4

Si nous divisons le polynôme $5x^4 + ax^3 + bx + 9$ par $2x + 3$, alors le reste est égal à 8 .
Quelle est la relation entre a et b ?

Solution

<u>Rappel : la loi du reste</u>

Le reste r de la division d'un polynôme $p(x)$ par un binôme (x - a) est égal à la valeur numérique du polynôme $p(x)$ en a , c'est-à-dire $r = p(a)$.

En effet, quand on divise un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$, on a la relation

$$p(x) = q(x).d(x) + r(x)$$

où $q(x)$ et $r(x)$ sont respectivement le polynôme quotient et le polynôme reste.

Si le diviseur est (x - a) , nous avons

$$p(x) = q(x).(x - a) + r$$

où r est un réel puisque le degré de (x - a) est égal à 1 et que le degré du reste doit être strictement inférieur à celui du diviseur.

En remplaçant x par a dans la relation précédente, nous obtenons : $p(a) = q(a).(a - a) + r = r$.

Voici une variante de la loi du reste pour un diviseur de la forme ($k\,x + t$) :

Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par un binôme ($k\,x + t$) est égal à la valeur numérique du polynôme $p(x)$ en $-\frac{t}{k}$, c'est-à-dire $r = p\left(-\frac{t}{k}\right)$.

On la vérifie facilement en remplaçant x par $-\frac{t}{k}$ dans la relation $p(x) = q(x).(k\,x + t) + r$.

Revenons à notre problème en posant $p(x) = 5x^4 + ax^3 + bx + 9$ et $k\,x + t = 2x + 3$.

Le reste de la division de $p(x)$ par $2x + 3$ étant égal à 8 , nous avons $p\left(-\frac{3}{2}\right) = 8$ et donc :

$$5\left(-\frac{3}{2}\right)^4 + a\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + b\left(-\frac{3}{2}\right) + 9 = 8 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{405}{16} - \frac{27}{8}a - \frac{3}{2}b = -1$$

$$\Leftrightarrow\quad 405 - 54a - 24b = -16 \quad\Leftrightarrow\quad 54a + 24b = 389$$

Réponse B

Question 5

Bart hérite d'une somme de 4000 euros et peut l'épargner à un taux d'intérêt annuel fixe de 4,5 % . Combien de temps devra-t-il attendre pour doubler ce montant ?

Solution

Il s'agit sans doute d'intérêts composés, ce qui conduit à une croissance exponentielle du capital selon la formule

$$C(n) = C(0).\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

où $C(0)$ est le capital initial, t le nombre de % d'intérêts, n le nombre d'années et $C(n)$ le capital après n années.

Pour déterminer le temps de doublement du capital, il faut résoudre l'équation

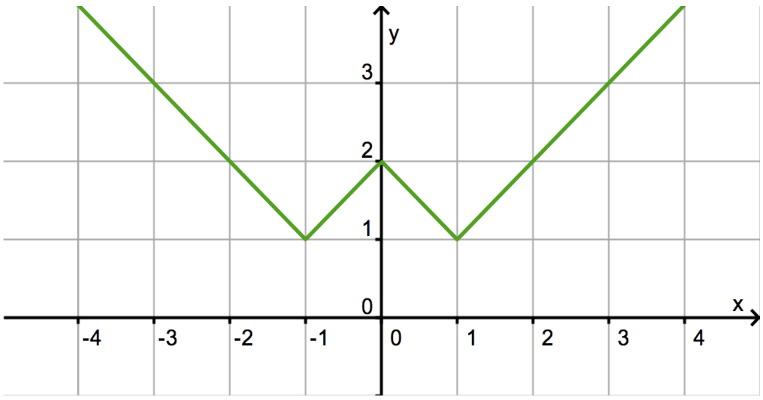
$$2.C(0) = C(0).\left(1 + \frac{4{,}5}{100}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad 2 = (1{,}045)^n \ .$$

La solution est $n = \log_{1{,}045} 2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}045)}$ ($\approx$ 15,75 années).

Réponse B

Question 6

Quelle expression produit le graphique suivant ?



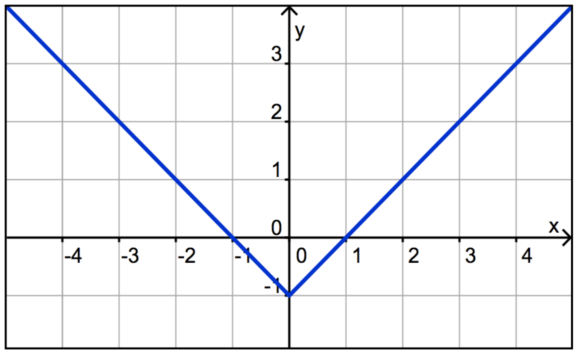
Solution

Dans un contexte d'examen, on peut tester différentes valeurs de x afin de procéder par élimination.

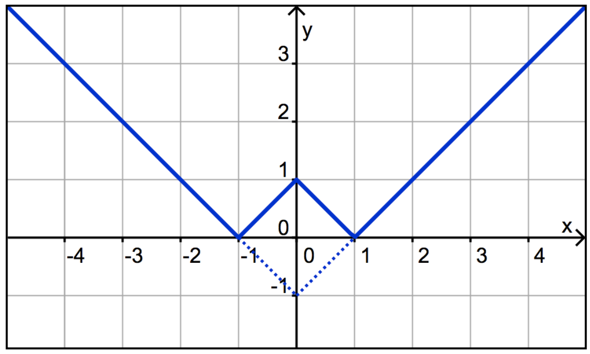
(A) $y = |x-1| + |x+1|$; si $x = 1$, on obtient $y = 2$ ce qui ne correspond pas au graphique.
(B) $y = 2|x-1| + 1$; si $x = 0$, on obtient $y = 3$ ce qui ne correspond pas au graphique.
(D) $y = |x^2 - 1| + 1$; si $x = 2$, on obtient $y = 4$ ce qui ne correspond pas au graphique.
(E) $y = ||x| + 1| + 1$ si $x = 1$, on obtient $y = 3$ ce qui ne correspond pas au graphique.

Il reste donc la proposition (C) . Voici les étapes d'un raisonnement graphique pour confirmation.

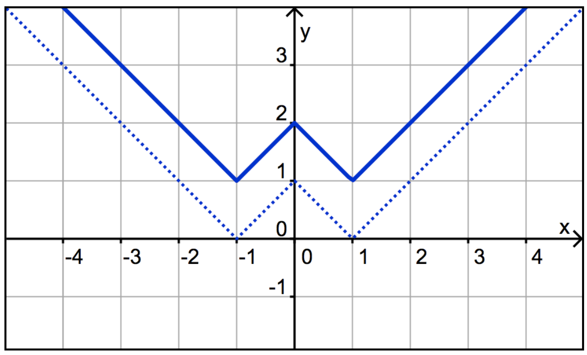
① $h(x) = |x| - 1$



② $g(x) = \big||x| - 1\big|$



③ $f(x) = \big||x| - 1\big| + 1$



Réponse C

Question 7

Quels $x \in \mathbf{R}$ satisfont à l'inégalité donnée ?

$$\frac{(4 - x^2)(3x^2 - 9x + 6)}{2x + 4} \leq 0$$

Solution

C'est une de ces inéquations classiques que l'on travaille en 4[e] année. On la résout à l'aide d'un tableau de signes après avoir déterminé les racines des différents facteurs.

x		-2		1		2	
$4 - x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$3x^2 - 9x + 6$	+	+	+	0	-	0	+
$2x + 4$	-	0	+	+	+	+	+
$\dfrac{(4 - x^2)(3x^2 - 9x + 6)}{2x + 4}$	+	X	+	0	-	0	-

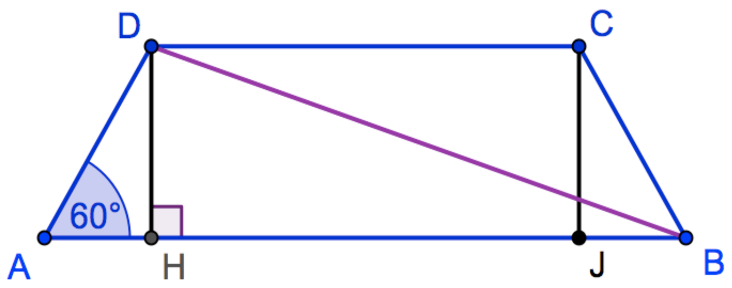
Ensembles des solutions : $S = [\,1\,, +\infty\,[$.

Réponse B

Question 8

Dans un trapèze isocèle, les bases mesurent 6 et 4 cm, et un angle de base mesure 60 degrés. Calculez la longueur des diagonales.

Solution



Le trapèze étant isocèle, nous avons $|HJ| = |CD| = 4$. Donc $|AH| = \dfrac{|AB| - |HJ|}{2} = \dfrac{6-4}{2} = 1$.

Dans le triangle rectangle AHD , nous avons $|HD| = |AH| . \tan 60° = \sqrt{3}$.

Donc, dans le triangle rectangle BHD , nous avons $|BD|^2 = |HB|^2 + |HD|^2 = 25 + 3 = 28$.

Finalement $|BD| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

Réponse A

Question 9

Il y a 10 garçons et 14 filles dans une classe. Nous souhaitons choisir une délégation de trois personnes.
De combien de façons cela peut-il être fait si un garçon et deux filles doivent être choisis ?

Solution

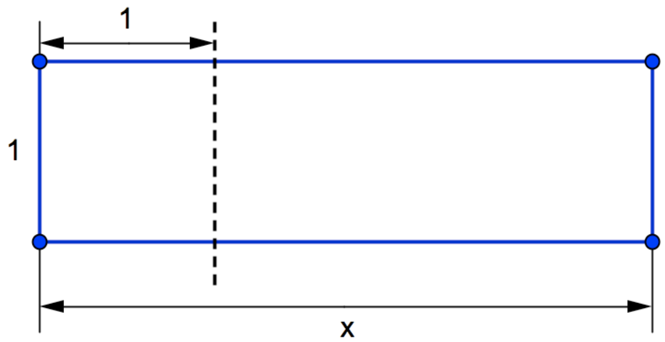
Il y a 10 façons de choisir le garçon et il y a $C_{14}^2 = \dfrac{14 \times 13}{2} = 91$ façons de choisir les deux filles.

Il y a donc $10 \times 91 = 910$ façons de former la délégation.

Réponse A

Question 10

Une feuille de papier rectangulaire a une largeur de 1 m et une longueur x.
Vous coupez le papier en deux, en découpant un carré de 1 m de côté.
Si vous mesurez la longueur et la largeur du morceau de papier restant, vous remarquez que le rapport entre la longueur et la largeur de ce morceau est le même que celui de la feuille de papier d'origine. Quelle est la longueur de la feuille de papier originale (exprimée en m) ?



Solution

Les dimensions du rectangle restant sont $(x - 1)$ et 1 .
Contrairement à ce que la figure peut laisser croire, la largeur de ce rectangle est $(x - 1)$ et sa longueur est 1 .

L'égalité des rapports s'écrit donc : $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$.

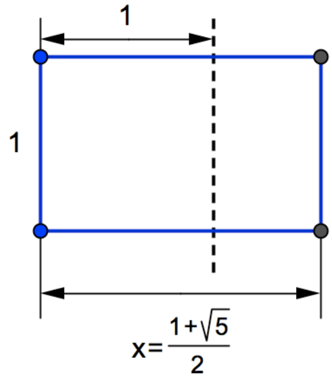
C'est l'équation à résoudre : $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

Nous avons $\Delta = 5$ et $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Seule la solution positive est acceptable : $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

C'est le fameux « nombre d'or ».

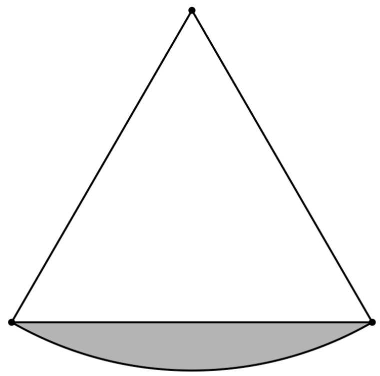
Réponse B

Représentation de la situation



Question 11

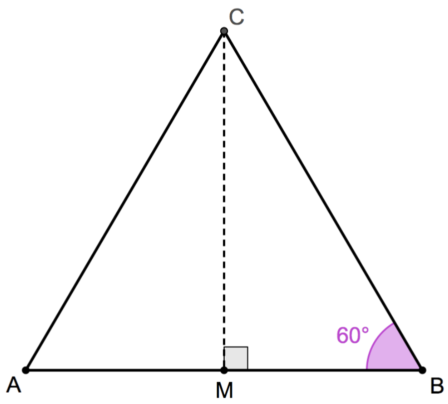
Les cotés d'un triangle équilatéral mesurent 10 cm .
À l'un des côtés, nous dessinons un arc de cercle d'un rayon de 10 cm . Les points de départ et d'arrivée de cet arc de cercle coïncident avec les extrémités de ce côté.
Quelle est la surface (en cm^2) entre le côté du triangle et l'arc de cercle (la zone grise de la figure) ?

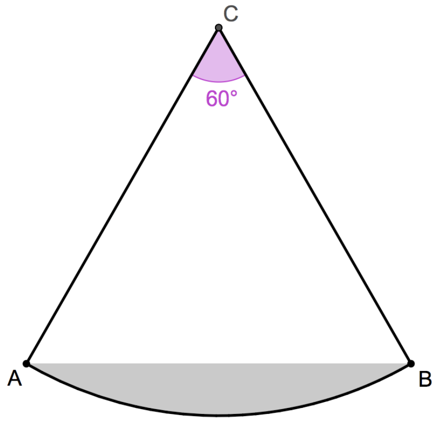


Solution

L'aire du triangle équilatéral ABC est :

$$\frac{|AB|.|MC|}{2} = \frac{10.10.\sin 60°}{2} = 25\sqrt{3} \ .$$





L'aire du secteur de disque (triangle et zone grise) est égale à 1/6 de l'aire du disque de rayon 10 cm :

$$\frac{1}{6}\pi.10^2 = \frac{50\pi}{3} \ .$$

L'aire de la zone grise est donc : $\dfrac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} = 25.\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

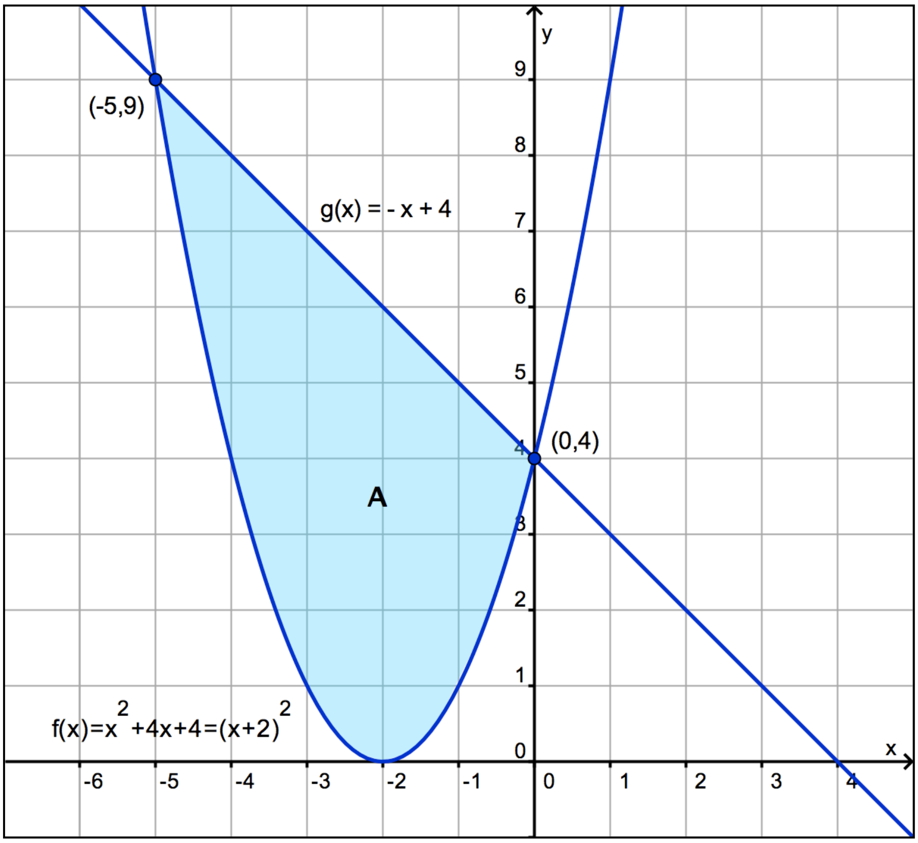
Réponse A

Question 12

Calculez la surface délimitée par les graphiques des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = -x + 4 \ .$$

Solution



$$A = \int_{-5}^{0} \left[g(x) - f(x) \right] dx = \int_{-5}^{0} \left(-x + 4 - x^2 - 4x - 4 \right) dx = \int_{-5}^{0} \left(-x^2 - 5x \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} \right]_{-5}^{0} = \frac{-125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6} \ (ua) \ \text{ soit } \ 20{,}83333\ldots \ (ua).$$

Il n'y a aucune réponse correcte proposée.

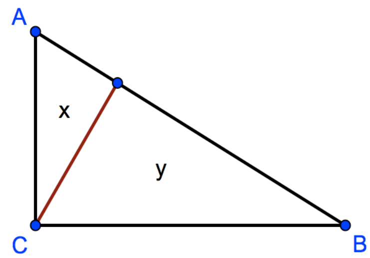
Réponse E

Question 13

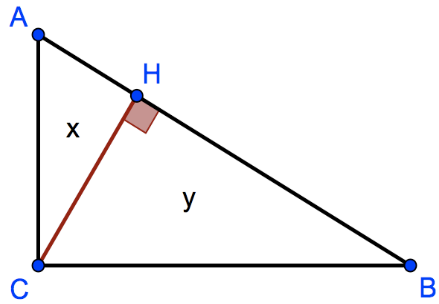
Un triangle rectangle ABC est divisé en deux parties x et y. C'est la hauteur issue du sommet de l'angle droit qui divise le triangle.

La zone x appartient à la partie qui contient le sommet A.

Déterminez le rapport des surfaces $\frac{x}{y}$.



Solution



L'aire du triangle AHC est $x = \frac{|AH|.|HC|}{2}$.

Celle du triangle BHC est $y = \frac{|BH|.|HC|}{2}$.

Le rapport de ces aires est $$\frac{x}{y} = \frac{\frac{|AH|.|HC|}{2}}{\frac{|BH|.|HC|}{2}} = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|AC|.\cos A}{|BC|.\cos B}.$$

En effet, dans le triangle rectangle AHC, on a $|AH| = |AC|.\cos A$ et dans le triangle rectangle BHC, on a $|BH| = |BC|.\cos B$.

De plus, dans le triangle rectangle ABC, on a $\cot A = \frac{|AC|}{|BC|}$.

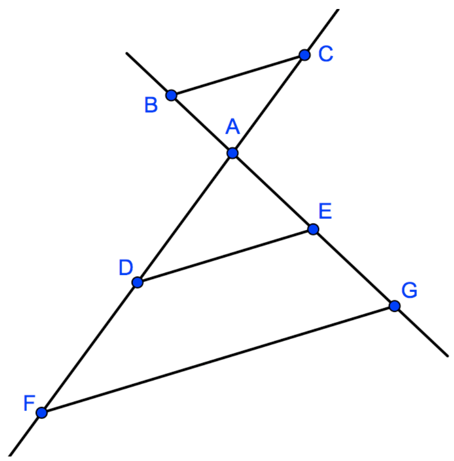
Nous en déduisons que $\frac{x}{y} = \cot A . \frac{\cos A}{\sin A} = \cot^2 A$.

Aucune des réponses proposées n'est correcte.

Réponse E

Question 14

Sur deux droites qui se coupent en A, on choisit B, C, D, E, F et G de sorte que $BC \,//\, DE \,//\, FG$.
De plus, nous savons que $|AB| = 2$, $|AC| = 3$, $|AE| = 4$ et $|AF| = 10$ (voir figure).
Déterminez $|EG|$.



Solution

D'après le théorème de THALÈS, nous avons : $\dfrac{|AF|}{|AC|} = \dfrac{|AG|}{|AB|} \rightarrow \dfrac{10}{3} = \dfrac{|AG|}{2} \rightarrow |AG| = \dfrac{20}{3}$.

Donc $|EG| = |AG| - |AE| = \dfrac{20}{3} - 4 = \dfrac{8}{3}$.

Réponse C

Question 15

Combien de bougies coniques peut-on fabriquer avec 1 litre de cire, si l'on sait qu'une bougie a un diamètre de 5 cm et une hauteur de 12 cm (1 litre = 1 dm^3).

Solution

Le volume d'un cône de révolution droit est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ où r est le rayon de sa base circulaire et h sa hauteur.

Le volume d'une bougie est donc $v = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{5}{2}\right)^2.12 = 25\pi\ (cm^3)$.

Comme 1 litre = 1000 cm^3, nous avons $\dfrac{1000}{25\pi} = \dfrac{40}{\pi} \approx 12{,}7$.

Il est donc possible de fabriquer 12 bougies.

Réponse C

Question 16

Trente personnes de tailles différentes se trouvent dans un rectangle de six rangées de cinq personnes chacune. De chaque rangée, nous choisissons la plus petite et des six plus petites nous prenons la plus grande, c'est Pete. Nous choisissons aussi le plus grand de chaque rangée et parmi les six plus grands, nous choisissons le plus petit, c'est-à-dire Jean. Ensuite, nous mettons les trente personnes l'une à côté de l'autre par ordre de grandeur, la plus petite à gauche et la plus grande à droite. À quelle position Jean ne peut-il pas se trouver ?

(A) 21 positions à droite de Pete
(B) 19 positions à gauche de Pete
(C) directement à côté de Pete
(D) 19 positions à droite de Pete
(E) il n'est possible d'exclure aucune proposition

Solution

Comme Pete est la plus grande des six personnes choisies en premier, il est plus grand qu'au moins cinq personnes. Si nous numérotons les personnes de 1 à 30 par tailles croissantes (la plus petite portant le numéro 1 et la plus grande le numéro 30), le numéro de Pete est au moins le 6.
Quant à Jean, comme il est plus petit qu'au moins 5 personnes, son numéro est au plus le 25.
Il en découle que Jean ne peut pas se trouver 21 positions à droite de Pete, car il aurait alors au moins le numéro 27.

Réponse A

Question 17

On donne la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2$. Déterminez la surface de la zone délimitée par le graphique de f et la tangente au graphique de f en son maximum local.

Solution

Il est facile d'étudier les variations de f et d'esquisser son graphique.

En effet, $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$.

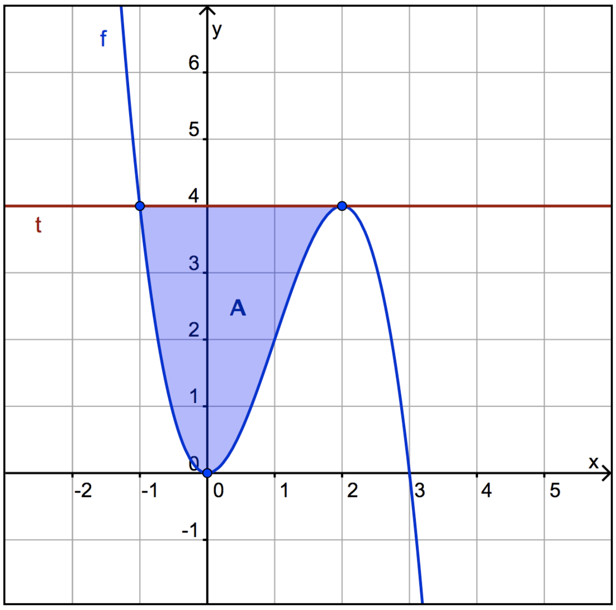
x		0		2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	Min	↗	Max	↘

Le minimum est en $(0,0)$ tandis que le maximum se trouve au point $(2, f(2)) = (2,4)$.

Comme $f'(2) = 0$, la tangente t en ce point est horizontale et nous avons $t \equiv y = 4$.

Connaissant l'allure générale d'une fonction polynôme du 3^e^ degré, nous obtenons le graphique de la page suivante, permettant de déterminer exactement la surface à calculer.

Dans le contexte d'un examen, inutile de résoudre l'équation $f(x) = 4$, car nous trouvons facilement que la tangente coupe encore le graphique de f au point $(-1,4)$.



L'aire demandée est donc donnée par :

$$A = \int_{-1}^{2} \left(4 - f(x)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(4 + x^3 - 3x^2\right) dx = \left[4x + \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{-1}^{2} = (8 + 4 - 8) - \left(-4 + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{27}{4} \ (ua).$$

Réponse D

Question 18

Si $f(x) = x^2 - x$, alors on peut prouver que $f(x+1)$ est égale à …

Solution

$$f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x = f(-x) \ .$$

Réponse C

Question 19

Un cycliste fait du vélo d'un point A à un point B à une vitesse de α km/h et il revient en roulant deux fois moins vite. Le cycliste a besoin d'un total de 10 minutes. Si nous désignons la distance entre A et B par x (exprimée en km), laquelle des réponses suivantes correspond-elle au rapport $\dfrac{x}{\alpha}$ (exprimé en heures) ?

Solution

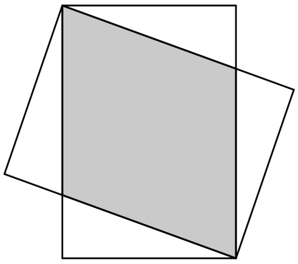
Le temps mis pour le trajet « aller » est donné par $\dfrac{x}{\alpha}$ (la distance divisée par la vitesse) et le temps mis pour le trajet « retour » est $\dfrac{x}{\alpha/2} = \dfrac{2x}{\alpha}$.

Le temps total est $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{2x}{\alpha} = \dfrac{3x}{\alpha} = \dfrac{1}{6}$ (car $10 \text{ min} = 1/6 \text{ h}$). Donc, $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{1}{18}$

Réponse C

Question 20

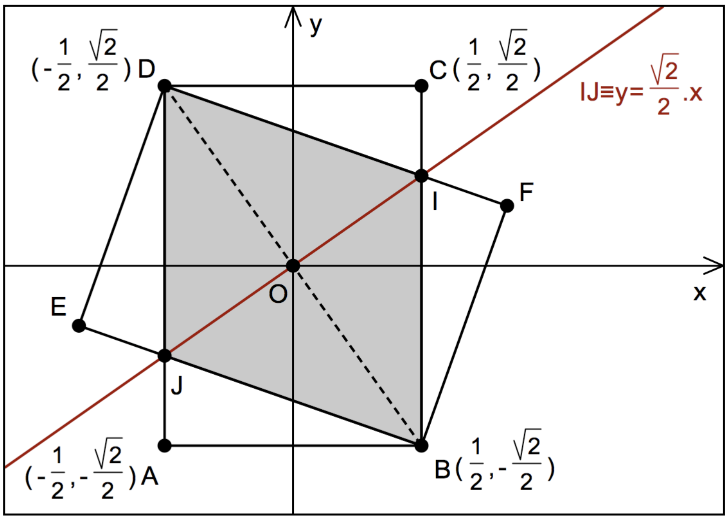
On donne deux rectangles avec des côtés égaux à 1 et $\sqrt{2}$ comme indiqué sur la figure.
Quelle est la surface de la partie où ils se chevauchent ?



Solution

Nous pouvons aborder le problème de manière analytique, en prenant le centre des rectangles comme origine O du repère et les axes comme dans la figure ci-contre.

Les deux rectangles isométriques $ABCD$ et $BFDE$ sont symétriques l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe IJ.



La droite BD a pour pente $m_{BD} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}} = -\sqrt{2}$.

L'axe de symétrie IJ étant perpendiculaire à BD, nous avons $m_{IJ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $IJ \equiv y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

Le point I , d'abscisse ½ , a donc pour coordonnées $I\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Cela nous donne les distances $|OI| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{16}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ et $|IJ| = 2\,|OI| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Comme le rectangle a pour dimensions 1 et $\sqrt{2}$, sa diagonale [BD] mesure $\sqrt{3}$.

Le quadrilatère gris dont nous cherchons l'aire est un losange et son aire est le demi produit des longueurs de ses diagonales :

$$\text{Aire}\,(BIDJ) = \frac{1}{2}.|IJ|.|BD| = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{18}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} .$$

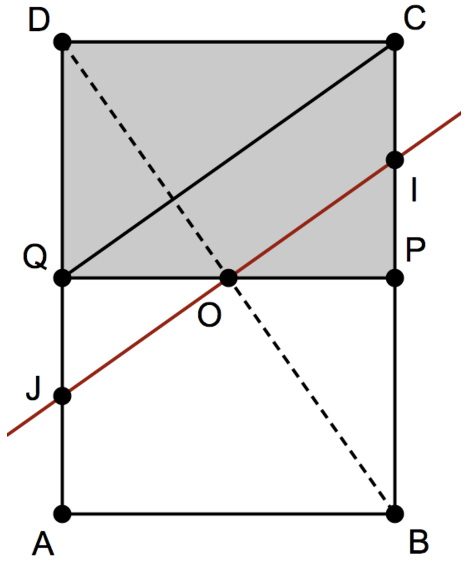
Réponse A

Remarque

Nous pouvions aussi simplement soustraire les aires des triangles isométriques CDI et ABJ de celle du rectangle $ABCD$:

$$\text{Aire}\,(BIDJ) = \sqrt{2} - 2\,.\frac{|CD|.|CI|}{2} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad .$$

Autre « façon de voir »



Dans le rectangle $PCDQ$, la pente de la diagonale QC est égale à

$$\frac{|QD|}{|DC|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .$$

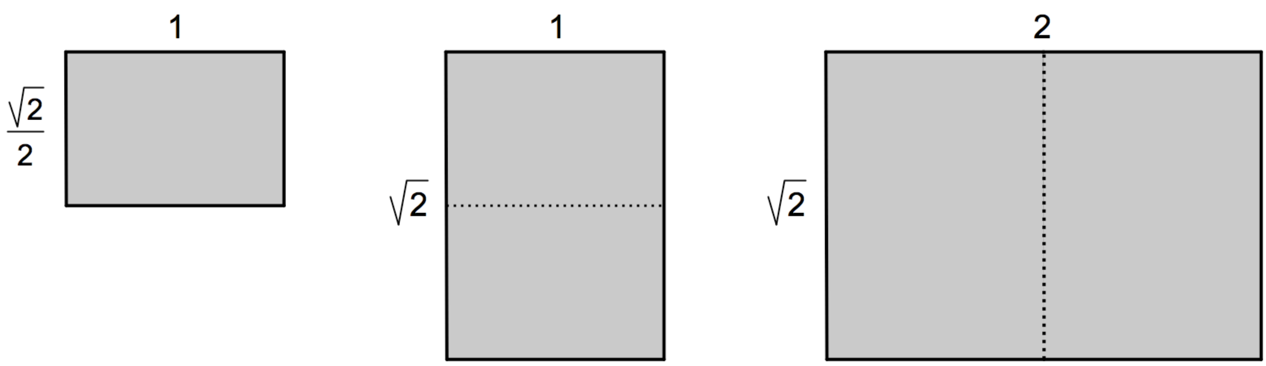
Nous en déduisons que $QC\,//\,IJ$ ou encore $QC\,//\,OI$.

Comme O est le milieu de $[\,QP\,]$, le « petit théorème de Thalès » dans le triangle PCQ nous apprend que I est le milieu de $[\,PC\,]$.

La distance $|PI|$ vaut donc $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et nous retrouvons les coordonnées de I : $I\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Note au sujet du rectangle de dimensions 1 et $\sqrt{2}$

Si l'on prend la moitié d'un tel rectangle ou si on le double comme ci-dessous, on obtient des rectangles qui sont semblables au premier : le rapport de la longueur à la largeur vaut toujours $\sqrt{2}$.



Ces proportions sont celles d'une feuille de papier A4 : une largeur de 21 (cm) et une longueur égale à $21\sqrt{2} \approx 29{,}7$ (cm). Si on plie cette feuille en deux, on obtient le format A5 . Si on double une page A4 , on obtient le format A3 . Les autres formats s'obtiennent de la même façon.