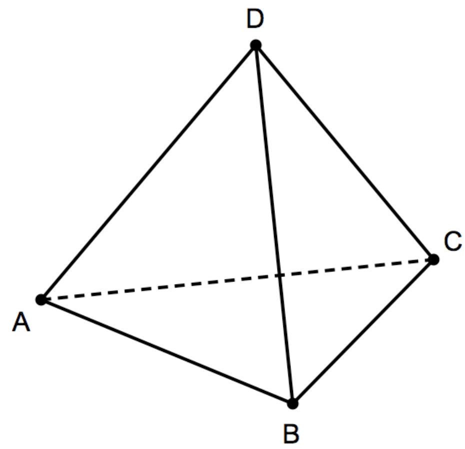
AUTOUR DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER

Généralités

Un tétraèdre régulier est un polyèdre régulier dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux, et qui possède quatre sommets et six arêtes.



Il satisfait évidemment à la relation d'EULER, valable pour tous les polyèdres réguliers :

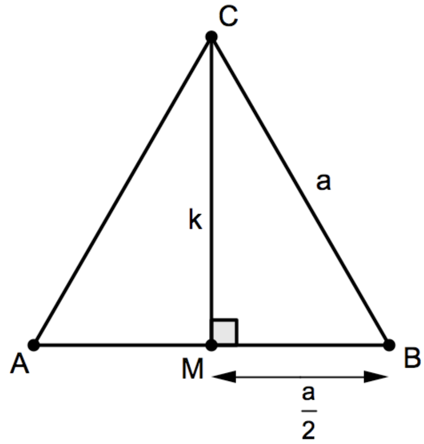
$$s - a + f = 2$$

où s représente le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

Aire totale

Si a est la longueur d'une arête du tétraèdre régulier, il est facile de calculer l'aire d'une de ses faces, un triangle équilatéral de base a et de hauteur k :

$$A_{face} = \frac{a \times k}{2} = \frac{a \times \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{a \times \sqrt{\frac{3a^2}{4}}}{2} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4} .$$



On peut évidemment utiliser la trigonométrie :

$$A_{face} = \frac{a \times k}{2} = \frac{a \times a \,.\, \sin 60°}{2} = \frac{a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4} .$$

L'aire extérieure totale du tétraèdre est donc :

$$\boxed{A_{tétraèdre} = \sqrt{3}\, a^2} .$$

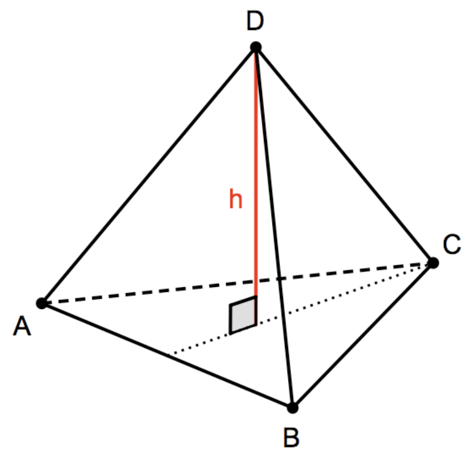
Volume

Comme pour toute pyramide, le volume est égal au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur :

$$V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h .$$

Pour le tétraèdre régulier : $V = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4} h = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{12} h$.

Le problème est maintenant de trouver la hauteur h en fonction de a, sachant que h est, par exemple, la longueur du segment passant par D et perpendiculaire à la face ABC. Un peu de patience …

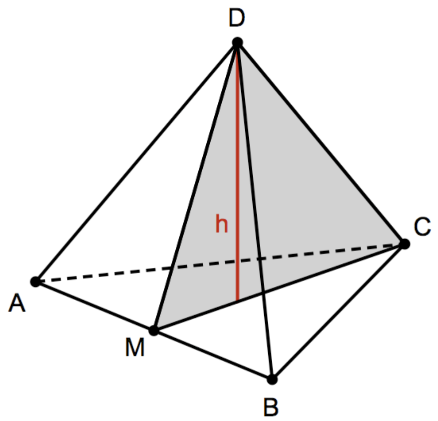


Plan médiateur d'une arête

Rappelons-nous d'abord que le plan médiateur d'un segment est • le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des extrémités du segment ; • le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

Soit M le milieu de l'arête $[AB]$.
Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan MCD.

En effet, M est évidemment équidistant de A et de B (d'une distance $a/2$), tandis que les points C et D sont tous deux situés à une distance a de A et de B.



Par un raisonnement analogue :

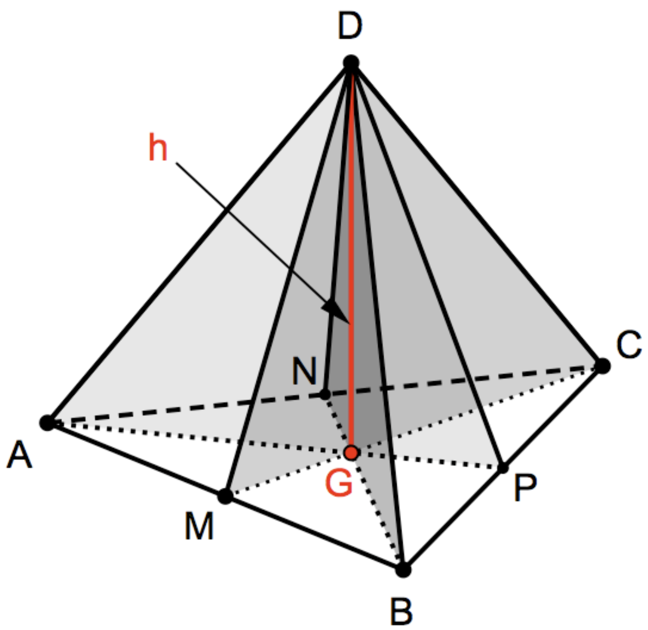
- le plan médiateur de l'arête $[AC]$ est NBD où N est le milieu de $[AC]$;
- le plan médiateur de l'arête $[BC]$ est PAD où P est le milieu de $[BC]$.

Ces trois plans comprennent le point D.

De plus :

- MCD contient MC, médiane du triangle ABC ;
- NBD contient NB, médiane du triangle ABC ;
- PAD contient PA, médiane du triangle ABC.

Vous savez que ces médianes se coupent en G, centre de gravité du triangle ABC. Les trois plans médiateurs ont donc en commun les points D et G, et ils ont ainsi la droite DG en commun.
Le segment $[DG]$ est une hauteur du tétraèdre et sa longueur est h. Justifions cela …



Comme MCD est le plan médiateur de $[AB]$, il est clair que AB est perpendiculaire à ce plan. La droite AB est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans MCD, en particulier :

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{DG} \ .$$

De la même façon, NBD étant le plan médiateur de $[AC]$, AC est perpendiculaire à ce plan. La droite AC est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans NBD, en particulier :

$$AC \perp DG \ .$$

La droite DG est donc orthogonale à AB et à AC, deux droites sécantes incluses dans ABC. En vertu du critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, nous avons $DG \perp ABC$.

$[DG]$ est une hauteur du tétraèdre régulier $ABCD$.

Dans un tétraèdre régulier, les plans médiateurs des trois arêtes d'une même face se coupent suivant une droite perpendiculaire à cette face et comprenant le quatrième sommet.
Cette droite comprend en outre le centre de gravité de la face.
La longueur du segment joignant ce centre de gravité et le quatrième sommet est la hauteur du tétraèdre.

Quelle est la mesure de $[DG]$ en fonction de a ?

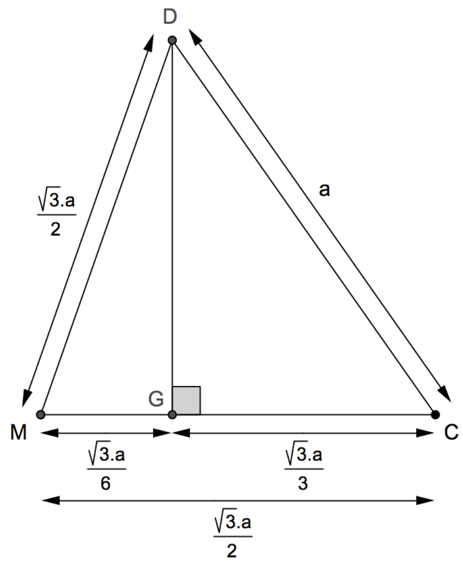
Travaillons dans le plan MCD. Nous avons $DG \perp ABC$ et donc $DG \perp MC$ (car $MC \subset ABC$).

Notons aussi que $MCD \perp ABC$ car MCD contient DG qui est perpendiculaire à ABC (critère de perpendicularité de deux plans).

Nous savons que les médianes d'un triangle se coupent au tiers de leur longueur, donc :

$$|MG| = \frac{1}{3}|MC| = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

et $$|GC| = \frac{2}{3}|MC| = \frac{\sqrt{3}}{3}a \ .$$



Cela nous permet de trouver la hauteur :

$$|DG|^2 = |DM|^2 - |MG|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$\boxed{|DG| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a} \quad \text{ou} \quad \boxed{|DG| = \frac{\sqrt{6}}{3}a}$$

Nous trouvons enfin le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête a :

$$V = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}h = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{12}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

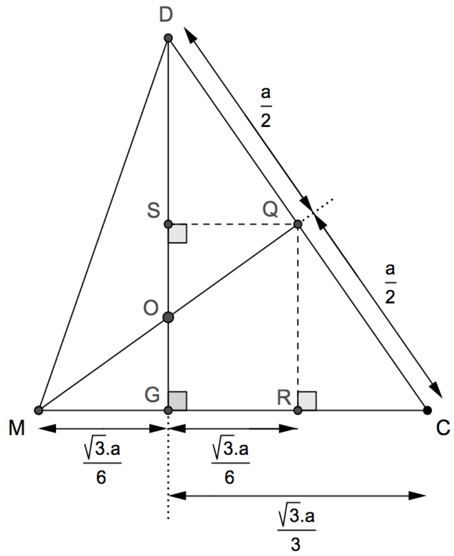
$$\boxed{V_{tétraèdre} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3}$$

Sphère circonscrite à un tétraèdre régulier

Où se trouve le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier ?
Quel est le rayon de cette sphère en fonction de l'arête du tétraèdre ?

Soit O le centre de la sphère. Nous avons bien sûr $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$, où r est le rayon de la sphère.
Le point O appartient ainsi aux six plans médiateurs des arêtes du tétraèdre. Il appartient donc, entre autres, à la droite DG (1).

À quelle hauteur le point O se situe-t-il sur le segment $[DG]$?



Soit Q le milieu de $[DC]$. Comme $|OC| = |OD|$, le point O appartient à la médiatrice du segment $[CD]$.
Dans le triangle isocèle MCD, cette médiatrice est aussi médiane et il s'agit de MQ (2).

Donc, d'après (1) et (2) : $MQ \cap DG = \{O\}$.

Par le point Q, dans le plan MCD, traçons la parallèle à MC : par le théorème de THALES, elle coupe le segment $[DG]$ en son milieu (nommons-le S) et la longueur de $[QS]$ est la moitié de celle de $[GC]$. Donc : $|QS| = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ (c'est aussi la longueur de $|MG|$).

Les triangles rectangles OGM et OSQ ayant trois angles deux à deux de même amplitude et un côté de même longueur, ils sont isométriques. Par conséquent : $|OS| = |OG|$.

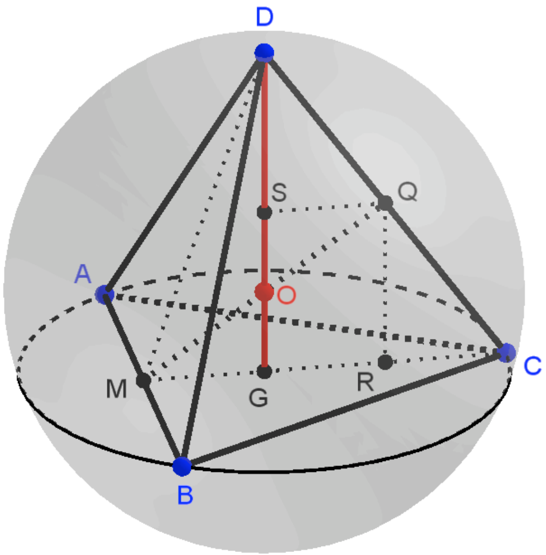
> Le point O est le milieu du segment $[SG]$ et il se trouve ainsi au quart de la hauteur du tétraèdre :
>
> $$|OG| = \frac{1}{4}|DG|.$$

Nous avons ainsi $|OG| = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, et le rayon de la sphère est $r = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

> Le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier d'arête a est $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Nous obtenons ainsi le volume de la sphère circonscrite :

$$V_{sphère\ circ} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{6\sqrt{6}}{64}a^3 = \pi\frac{\sqrt{6}}{8}a^3 \longrightarrow \boxed{V_{sphère\ circ} = \frac{\sqrt{6}}{8}\pi a^3}$$



Sphère inscrite dans un tétraèdre régulier

La sphère inscrite à un tétraèdre régulier est tangente à chacune des quatre faces de celui-ci.
Le centre de cette sphère est ainsi équidistant des quatre faces, et donc, quelles que soient les deux faces considérées, le centre appartient à leur plan bissecteur.
Ceci demande sans doute quelques explications …

D'abord un petit rappel de géométrie plane :

> Le lieu géométrique des points du plan équidistants de deux droites sécantes est la réunion de leurs deux bissectrices.

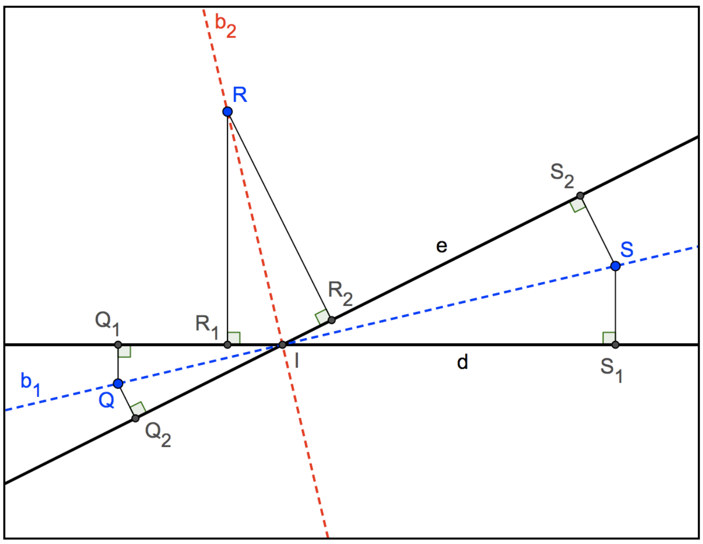
Soient par exemple deux droites sécantes d et e, et leurs bissectrices b_1 et b_2.

Pour le point S, appartenant à b_1, nous avons :

$$d(S,S_1) = d(S,S_2) \Leftrightarrow d(S,d) = d(S,e) \ .$$

Et pour le point R, appartenant à b_2, nous avons :

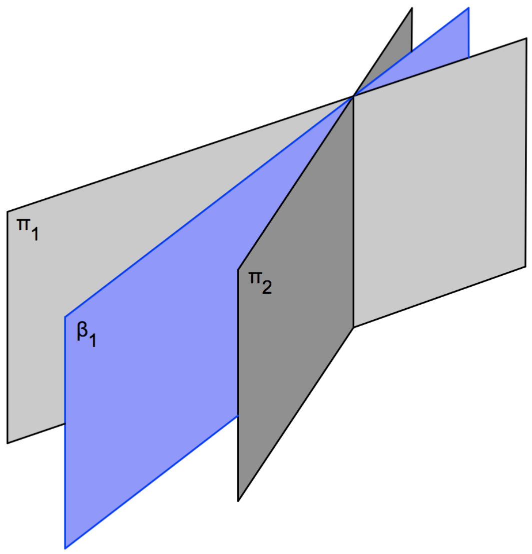
$$d(R,R_1) = d(R,R_2) \Leftrightarrow d(R,d) = d(R,e) \ .$$

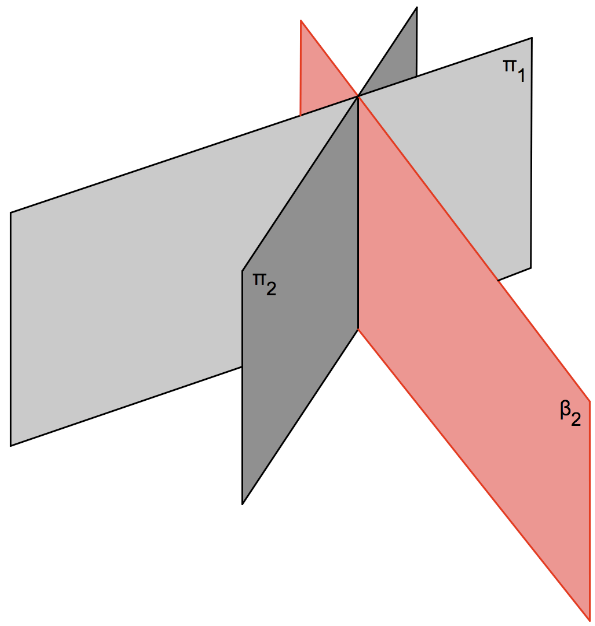


En géométrie spatiale, le pendant d'une bissectrice est un *plan bissecteur* :

Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants de deux plans sécants est la réunion de leurs deux plans bissecteurs.

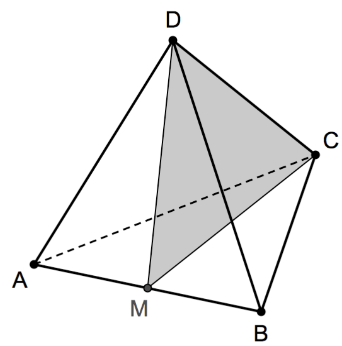
Voici une représentation des plans bissecteurs β_1 et β_2 du *dièdre* formé par les plans sécants π_1 et π_2 .
La représentation plane de cette situation spatiale (ci-dessous) ne le suggère pas clairement, mais il n'en est pas moins vrai que l'angle aigu (obtus) formé par les plans π_1 et β_1 est égal à l'angle aigu (obtus) formé par les plans π_2 et β_1 (figure de gauche).
Il en va de même pour les angles formés par les plans π_1 et β_2 et π_2 et β_2 (figure de droite).





Revenons à notre tétraèdre. Quel est, par exemple, le plan bissecteur des plans ACD et BCD ?

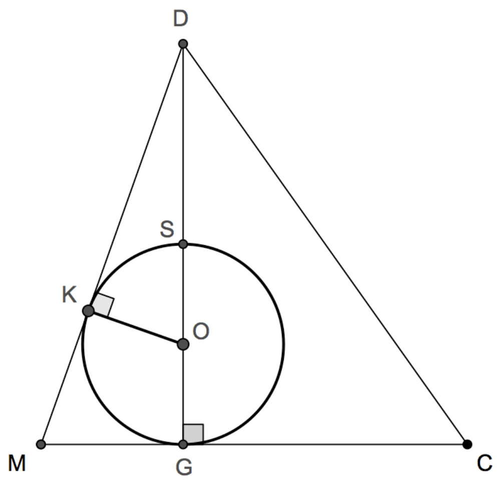
Soit M le milieu de $[AB]$. Dans le triangle équilatéral ABC, CM est une bissectrice de la paire de droites AC et BC, tandis que dans le triangle équilatéral ABD, DM est une bissectrice de la paire de droites AD et BD.
Ces deux bissectrices déterminent le plan bissecteur CDM.



Notons bien que CDM n'est autre que le plan médiateur de $[AB]$, comme nous l'avons vu précédemment.

Plus généralement, dans un tétraèdre régulier, le plan bissecteur de deux faces (je me permets cet abus de langage au lieu de dire « plans ») est aussi le plan médiateur de l'arête qui n'appartient à aucune des deux faces.
Par exemple, le plan bissecteur des plans ACD et ABD est le plan médiateur de $[BC]$.

Revenons à notre sphère inscrite. Comme son centre appartient à tous les plans bissecteurs qui sont par ailleurs des plans médiateurs, il est clair qu'il s'agit du point O : la sphère inscrite a le même centre que la sphère circonscrite.



Le rayon ρ de la sphère inscrite est la longueur d'un segment d'extrémité O et perpendiculaire à une des faces, par exemple $[\,OG\,]$ ou $[\,OK\,]$.

Nous avons donc : $\rho = \dfrac{\sqrt{6}}{12}a$.

$$V_{sphère\ insc} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{6\sqrt{6}}{1728}a^3 = \pi\frac{\sqrt{6}}{216}a^3 \rightarrow \boxed{V_{sphère\ circ} = \frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3}$$

Angle dièdre dans un tétraèdre régulier (angle entre deux faces)

Quelle est l'amplitude de l'angle aigu entre deux faces d'un tétraèdre régulier ?
Cherchons par exemple l'angle aigu entre les faces ABC et ABD . C'est aussi l'angle aigu entre les droites MC et MD .

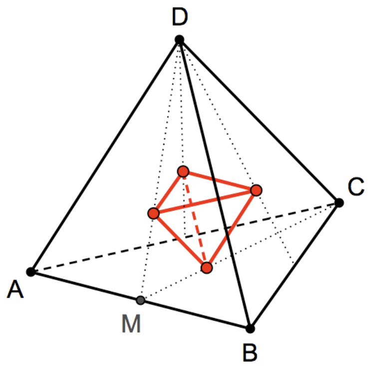
La figure ci-dessus et tout ce que nous avons trouvé précédemment nous permettent d'écrire :

$$\tan C\hat{M}D = \frac{|DG|}{|MG|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad C\hat{M}D \approx 70{,}5288° \ .$$

Quoi d'autre ?

Il y a sûrement beaucoup d'autres propriétés intéressantes. En voici quelques-unes que vous pouvez vérifier …

Le polyèdre dual d'un tétraèdre régulier est un tétraèdre régulier



Joignons les centres de gravité des faces : nous obtenons les sommets d'un autre tétraèdre régulier d'arête $a / 3$.

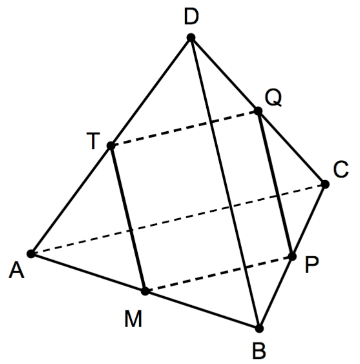
Son volume est égal à $1 / 27$ du tétraèdre initial.

Au fait, savez-vous quel est le polyèdre dual d'un cube ? Joignez les centres des six faces carrées et concluez. Ensuite, joignez les centres de gravité des faces du nouveau polyèdre obtenu.
Quel polyèdre obtenez-vous ? Le processus peut se poursuivre …

Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes gauches sont orthogonales

Cette propriété figure déjà comme exercice dans votre cours de 5^{e} (géométrie synthétique de l'espace). Ce n'est pas très long à démontrer : utilisez le plan médiateur d'une arête.

Une section plane particulière



Considérons par exemple la figure ci-contre où les points M , P , Q et T sont les milieux respectifs des arêtes auxquelles ils appartiennent.

Le quadrilatère $MPQT$ est un carré (ou « la section du tétraèdre régulier par le plan MPQ est carrée »). Démontrez.

Cube, octaèdre et tétraèdre réguliers

Reliez les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier comme dans la figure de gauche.
Vous obtenez un octaèdre régulier. Justifiez.

Reliez les sommets d'un cube comme dans la figure de droite.
Vous obtenez un tétraèdre régulier. Justifiez.