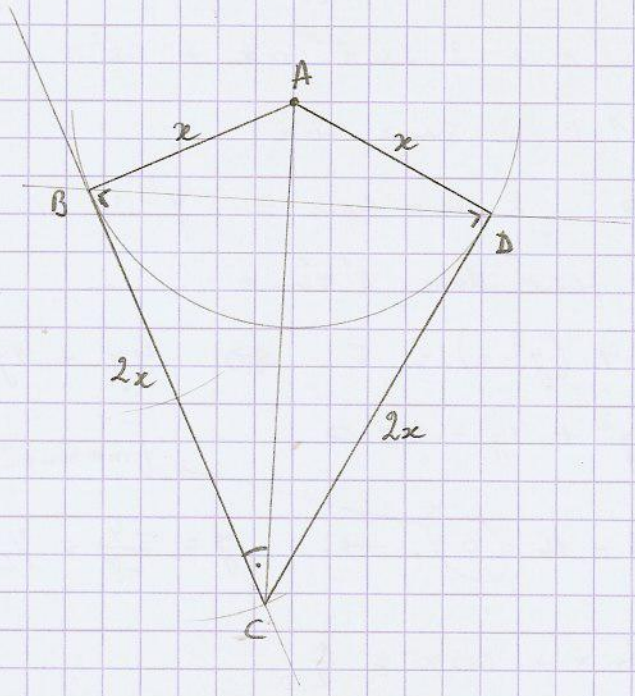
Question 3

Soit un terrain à bâtir en forme de quadrilatère ABCD.
Le géomètre mandaté pour relever les dimensions de ce terrain a consigné sur son plan que les deux côtés de l'angle au sommet A sont de même longueur x.
Les deux côtés de l'angle C, opposés à l'angle A, sont eux aussi de même longueur, valant le double de x.
On demande de calculer la valeur numérique de $\sin(C)$ si les angles B et D aux deux autres sommets du quadrilatère sont droits.
Pour résoudre cette question, il est nécessaire de représenter graphiquement le terrain (l'utilisation d'un compas est recommandée).



Les triangles ABC et ADC sont isométriques (côté-angle-côté).
Le quadrilatère ABCD est un "cerf-volant" d'axe de symétrie AC.

Dans le triangle rectangle ABC, nous avons :

$$|AC| = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}\,x \quad \text{et donc} \quad \sin\frac{C}{2} = \frac{x}{\sqrt{5}\,x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{2x}{\sqrt{5}\,x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc : $\sin C = 2 . \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{C}{2} = 2 . \frac{1}{\sqrt{5}} . \frac{2}{\sqrt{5}} = 4/5$.

Autre façon (si on connaît les formules "en $\tan\frac{a}{2}$" ; voir cours de 5^e, trigonométrie page 15).

Dans le triangle rectangle ABC : $\tan\frac{C}{2} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

Or, $\sin C = \dfrac{2 . \tan\frac{C}{2}}{1 + \tan^2\frac{C}{2}} = \dfrac{2 . 1/2}{1 + 1/4} = \dfrac{1}{5/4} = \dfrac{4}{5}$.